

1. 이차함수 $y = x^2 - 2(k-3)x + 4$ 의 그래프가 x 축과 서로 다른 두 점에서 만날 때, 상수 k 의 값의 범위는?

① $k < 1$

② $1 < k < 3$

③ $k < 3$

④ $3 < k < 5$

⑤ $k < 1$ 또는 $k > 5$

해설

이차함수 $y = x^2 - 2(k-3)x + 4$ 의 그래프가 x 축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 이차방정식 $x^2 - 2(k-3)x + 4 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D > 0$ 이어야 한다.

$$\frac{D}{4} = (k-3)^2 - 4 > 0$$

$$k^2 - 6k + 5 > 0, (k-1)(k-5) > 0$$

$$\therefore k < 1 \text{ 또는 } k > 5$$

2. 이차함수 $y = -\frac{1}{3}(x-2)^2 + 3$ 에 대한 설명으로 옳은 것은?

① $x = -2$ 일 때, 최댓값 3을 갖는다.

② $x = -2$ 일 때, 최솟값 3을 갖는다.

③ $x = 2$ 일 때, 최댓값 3을 갖는다.

④ $x = 2$ 일 때, 최솟값 3을 갖는다.

⑤ $x = -\frac{1}{3}$ 일 때, 최댓값 3을 갖는다.

해설

$x = 2$ 일 때, 최댓값 3을 갖는다.

3. 이차함수 $y = -x^2 + 10x - 13$ 의 최댓값을 m , 이차함수 $y = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$ 의 최솟값을 n 이라고 할 때, mn 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$$y = -x^2 + 10x - 13 = -(x - 5)^2 + 12$$

최댓값 $m = 12$

$$y = \frac{1}{2}x^2 + x + 1 = \frac{1}{2}(x + 1)^2 + \frac{1}{2}$$

최솟값 $n = \frac{1}{2}$

$$\therefore mn = 12 \times \frac{1}{2} = 6$$

4. $-2 \leq x \leq 1$ 에서 이차함수 $f(x) = x^2 + 2x$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

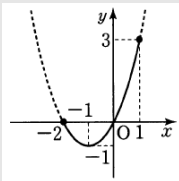
$f(x) = x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1$, $-2 \leq x \leq 1$ 에서
 $y = f(x)$ 의 그래프는 아래 그림과 같다.

즉, $f(-2) = 0$, $f(-1) = -1$, $f(1) = 3$

따라서, $x = 1$ 일 때 최댓값 3,

$x = -1$ 일 때 최솟값 -1 을 가지므로

구하는 합은 $3 - 1 = 2$



5. 이차함수 $y = x^2 + (k - 3)x + k$ 의 그래프가 x 축과 만나지 않을 때, 실수 k 의 값의 범위는?

① $-1 < k < 7$

② $-1 < k < 8$

③ $0 < k < 9$

④ $1 < k < 9$

⑤ $1 < k < 10$

해설

주어진 이차함수의 그래프가

x 축과 만나지 않으려면

이차방정식 $x^2 + (k - 3)x + k = 0$ 이

실근을 갖지 않아야 하므로

$$D = (k - 3)^2 - 4k < 0$$

$$k^2 - 10k + 9 < 0, (k - 1)(k - 9) < 0$$

$$\therefore 1 < k < 9$$

6. 직선 $y = 3x + 2$ 와 포물선 $y = x^2 + mx + 3$ 이 두 점에서 만나기 위한 실수 m 의 범위를 구하면?

① $m < -1, m > 3$

② $m < 1, m > 5$

③ $-1 < m < 3$

④ $-1 < m < 5$

⑤ $1 < m < 5$

해설

$y = 3x + 2, y = x^2 + mx + 3$ 에서 y 를 소거하면

$$x^2 + (m - 3)x + 1 = 0, D = (m - 3)^2 - 4 > 0$$

$$m^2 - 6m + 5 > 0, (m - 1)(m - 5) > 0$$

$$\therefore m < 1, m > 5$$

7. 이차함수 $y = x^2 - 2ax - 2b^2 - 4a + 4b - 6$ 의 그래프가 x 축에 접할 때, $a^2 + b^2$ 의 값은? (단, a, b 는 실수)

① 2

② 5

③ 8

④ 10

⑤ 13

해설

$$x^2 - 2ax - 2b^2 - 4a + 4b - 6 = 0 \text{에서}$$

$$\frac{D}{4} = a^2 - (-2b^2 - 4a + 4b - 6) = 0$$

$$\therefore (a + 2)^2 + 2(b - 1)^2 = 0$$

이 때, a, b 가 실수이므로 $a + 2 = 0, b - 1 = 0$

따라서 $a = -2, b = 1$ 이므로

$$a^2 + b^2 = 5$$

8. 함수 $y = -x^2 + kx$ 의 그래프가 직선 $y = -x + 4$ 에 접할 때, 양수 k 의 값은?

- ① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

해설

$y = -x^2 + kx$ 가 $y = -x + 4$ 에 접하려면

$4 - x = -x^2 + kx \Rightarrow x^2 - (k+1)x + 4 = 0$ 의 판별식은 $D = 0$ 이어야 한다.

$$D = (k+1)^2 - 16 = 0 \Rightarrow k+1 = \pm 4$$

$$\therefore k = 3 (\because k > 0)$$

9. 이차함수 $y = -(x - 1)(x + 3)$ 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$$y = -(x - 1)(x + 3)$$

$$= -x^2 - 2x + 3$$

$$= -(x + 1)^2 + 4$$

$x = -1$ 일 때, 최댓값 4 를 가진다.

10. 이차함수 $y = 2x^2$ 의 그래프와 모양이 같고 $x = -1$ 일 때, 최솟값 4를 갖는 이차함수의 식은?

① $y = 2(x - 1)^2$

② $y = 2(x - 1)^2 + 4$

③ $y = 2(x + 1)^2 + 4$

④ $y = -2(x + 1)^2 + 4$

⑤ $y = -2(x - 1)^2 + 4$

해설

$y = 2x^2$ 의 그래프와 모양이 같고 꼭짓점이 $(-1, 4)$ 이므로
 $y = 2(x + 1)^2 + 4$

11. $y = x^2 - (a^2 - 4a + 3)x + a^2 + 2$ 와 $y = x$ 의 두 교점이 원점에 관하여 대칭이다. 이 때, a 의 값을 구하면?

① 4

② 2

③ -4

④ -2

⑤ 3

해설

$$y = x^2 - (a^2 - 4a + 3)x + a^2 + 2$$

$$y = x \text{ 의 교점은 } x^2 - (a^2 - 4a + 3)x + a^2 + 2 = x$$

$x^2 - (a^2 - 4a + 4)x + a^2 + 2 = 0$ 의 두 근을 α, β 라면
두 근이 원점에 대칭이므로 중점은 원점이다.

$$\therefore \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{(a - 2)^2}{2} = 0$$

$$\therefore a = 2$$

12. x 의 방정식 $|x-1| + |x-3| = a$ 가 서로 다른 두 개의 실근을 가질 때, 실수 a 의 값의 범위는?

① $a < 1$

② $a > 1$

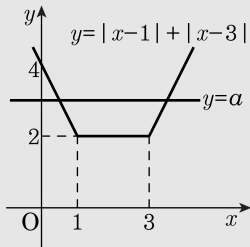
③ $a < 2$

④ $a > 2$

⑤ $a < 3$

해설

좌 우변을 각각 그래프를 그려보면
 $a > 2$



13. 이차함수 $y = x^2 + 2kx + 4k$ 의 최솟값을 m 이라 할 때, m 의 최댓값을 구하면?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$\begin{aligned} y &= x^2 + 2kx + 4k \\ &= (x^2 + 2kx) + 4k \\ &= (x + k)^2 - k^2 + 4k \end{aligned}$$

최솟값 $m = -k^2 + 4k = -(k - 2)^2 + 4$

따라서 m 의 최댓값 4이다.

14. $\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{5} = \frac{z+2}{3}$, $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ 일 때 $x^2 - y^2 + z^2$ 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -40

해설

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{5} = \frac{z+2}{3} = t \text{ 라 하면}$$

$x = 2t - 1, y = 5t + 3, z = 3t - 2$ 이므로

$$x^2 - y^2 + z^2 = (2t - 1)^2 - (5t + 3)^2 + (3t - 2)^2 = -12t^2 - 46t - 4 \\ \dots \textcircled{1}$$

$x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ 이므로

$$t \geq \frac{1}{2}, t \geq -\frac{3}{5}, t \geq \frac{2}{3}$$

$$\therefore t \geq \frac{2}{3}$$

이 범위에서 $\textcircled{1}$ 은 감소하므로

$t = \frac{2}{3}$ 일 때 최대이고 최댓값은

$$-12 \left(\frac{2}{3} \right)^2 - 46 \cdot \frac{2}{3} - 4 = -40$$

15. 합이 16 인 두 수가 있다. 이 두수의 곱의 최댓값을 구하면?

① 50

② 62

③ 64

④ 79

⑤ 83

해설

두 수를 각각 x , $16 - x$ 라고 하면

$$y = x(16 - x)$$

$$= -x^2 + 16x$$

$$= -(x^2 - 16x + 64 - 64)$$

$$= -(x - 8)^2 + 64$$

$x = 8$ 일 때, 최댓값 64 을 갖는다.

16. 둘레의 길이가 28cm 인 직사각형에서 넓이를 최대가 되게 하려면 가로와 세로의 길이를 각각 얼마로 하면 되겠는가?

① 가로 6 cm, 세로 8 cm

② 가로 7 cm, 세로 7 cm

③ 가로 8 cm, 세로 9 cm

④ 가로 8 cm, 세로 8 cm

⑤ 가로 7 cm, 세로 9 cm

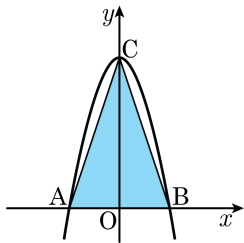
해설

가로의 길이를 x cm, 세로의 길이를 $(14 - x)$ cm, 넓이를 y cm² 라 하면

$$\begin{aligned}y &= x(14 - x) \\&= -x^2 + 14x \\&= -(x^2 - 14x + 49 - 49) \\&= -(x - 7)^2 + 49\end{aligned}$$

따라서 $x = 7$, 즉 가로 7 cm, 세로 7 cm 일 때 최댓값 49 cm² 를 가진다

17. $y = -x^2 + 9$ 의 그래프와 x 축과의 교점을 A, B 라고 하고, y 축과의 교점을 C 라고 할 때, $\triangle ABC$ 의 넓이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 27

해설

점 C 는 꼭짓점이므로 $(0, 9)$, 점 A 와 B
는 $y = 0$ 일 때, x 좌표이므로

$$0 = -x^2 + 9$$

$$\therefore x = \pm 3$$

$$\therefore A = (-3, 0), B = (3, 0)$$

$$\triangle ABC \text{의 넓이} = \frac{1}{2} \times 6 \times 9 = 27$$

18. 둘레의 길이가 20cm 인 철사를 구부려서 부채꼴 모양을 만들려고 한다. 부채꼴의 넓이가 최대가 되도록 하는 부채꼴의 반지름을 a , 이때 부채꼴의 넓이를 b 라 할 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 30

해설

부채꼴의 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}a(20 - 2a) = a(10 - a) = -a^2 + 10a \\ &= -(a^2 - 10a + 25) + 25 \\ &= -(a - 5)^2 + 25 \end{aligned}$$

$$a = 5, b = 25$$

따라서 $a + b = 30$ 이다.

19. 직각을 낀 두 변의 길이 x, y 의 합이 10이고 넓이가 8 이상인 직각삼각형이 있을 때, 다음 물음에 알맞게 답한 것을 고르면?

- (1) x 의 값의 범위를 구하여라.
 (2) 빗변의 길이를 z 라 할 때, z^2 을 x 에 관한 식으로 나타내어라.
 (3) z^2 의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

- ① (1) $2 \leq x \leq 9$, (2) $2x^2 - 20x + 100$, (3) 68, 52
 ② (1) $1 \leq x \leq 8$, (2) $2x^2 - 20x + 100$, (3) 68, 51
 ③ (1) $2 \leq x \leq 8$, (2) $2x^2 - 20x + 100$, (3) 68, 50
 ④ (1) $2 \leq x \leq 8$, (2) $x^2 - 20x + 100$, (3) 69, 52
 ⑤ (1) $2 \leq x \leq 8$, (2) $x^2 - 20x + 100$, (3) 69, 50

해설

- (1) $x + y = 10$ 에서 $y = 10 - x$ 이고
 삼각형의 넓이가 8 이상이므로

$$\frac{1}{2}xy \geq 8, \quad \frac{1}{2}x(10 - x) \geq 8$$

$$x^2 - 10x + 16 \leq 0, \quad (x - 2)(x - 8) \leq 0$$

$$\therefore 2 \leq x \leq 8$$
- (2) 피타고라스의 정리에 의해

$$z^2 = x^2 + y^2 = x^2 + (10 - x)^2$$

$$= 2x^2 - 20x + 100$$
- (3) $z^2 = 2x^2 - 20x + 100 = 2(x - 5)^2 + 50$
 이 때, $2 \leq x \leq 8$ 이므로 z^2 은 $x = 5$ 일 때
 최솟값 50, $x = 2$ 또는 $x = 8$ 일 때
 최댓값 68을 갖는다.

20. 지면으로부터 초속 20m 로 위로 던진 공의 x 초 후의 높이를 y m 라고 하면 $y = -5x^2 + 20x$ 인 관계가 성립한다. 이 공이 가장 높이 올라갔을 때의 지면으로부터의 높이를 구하여라.

▶ 답 : m

▷ 정답 : 20 m

해설

$y = -5x^2 + 20x$ 에서 $y = -5(x - 2)^2 + 20$ 이다.
따라서 가장 높이 올라갔을 때의 높이는 20m 이다.