

1. 집합 A 의 진부분집합의 개수가 31개일 때, $n(A)$ 의 값은?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

진부분집합은 자기 자신을 제외한 모든 부분집합이므로,
(진부분집합의 수) = (부분집합의 수) - 1 이 된다.
따라서 집합 A 의 부분집합의 개수는 $31 + 1 = 32$ 개이며,
 $2^n = 32 \therefore n = 5$ 이다.

2. 다음 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이를 구하여라.

(0,0), (2,6), (6,3)

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

$$\frac{1}{2}|2 \cdot 3 - 6 \cdot 6| = 15$$

3. 점 $(-1, -2)$ 를 x 축의 방향으로 6 만큼 평행이동한 다음 직선 $x = a$ 에 대하여 대칭이동하면 처음 위치로 돌아온다. 이 때, 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

먼저 점 $(-1, -2)$ 를 x 축의 방향으로 6 만큼
평행이동한 점의 좌표는
 $(-1 + 6, -2)$, 즉 $(5, -2)$
점 $(5, -2)$ 를 다시 직선 $x = a$ 에 대하여
대칭이동한 점의 좌표는
 $(2a - 5, -2)$
이 때, 이것이 $(-1, -2)$ 와 같으므로 $2a - 5 = -1$
 $\therefore a = 2$

4. 다음 중 항상 참이라고 할 수 없는 것은?

- ① 자연수 n 에 대하여, n^2 이 짝수이면 n 도 짝수이다.
- ② 자연수 n, m 에 대하여 $n^2 + m^2$ 이 홀수이면, nm 은 짝수이다.
- ③ 자연수 n 에 대하여, n^2 이 3의 배수이면, n 은 3의 배수이다.
- ④ a, b 가 실수일 때, $a + b\sqrt{2} = 0$ 이면, $a = 0$ 이다.
- ⑤ 두 실수 a, b 에 대하여, $a + b > 2$ 이면, $a > 1$ 또는 $b > 1$

해설

- ①, ③ : n^2 이 p 의 배수이면, n 은 p 의 배수이다. (참)
- ② : 대우는 ' nm 은 홀수이면 $n^2 + m^2$ 이 짝수이다.' nm 은 홀수, 즉 n, m 모두 홀수이면 n^2, m^2 모두 홀수이므로 $n^2 + m^2$ 은 짝수이다.
∴ 주어진 명제는 참
- ④ 반례 : $a = 2\sqrt{2}, b = -1$
※ 주의) 주어진 명제가 참일 때는 a, b 가 유리수라는 조건일 때임을 명심해야 한다.
- ⑤ 대우 : $a \leq 1$ 그리고 $b \leq 1$ 이면 $a + b \leq 2$ (참)

5. $x > 0, y > 0$ 일 때, $\left(3x + \frac{2}{y}\right)\left(y + \frac{6}{x}\right)$ 의 최솟값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 32

해설

$$\left(3x + \frac{2}{y}\right)\left(y + \frac{6}{x}\right) = 20 + 3\left(xy + \frac{4}{xy}\right)$$

산술기하조건을 사용하면

$$xy + \frac{4}{xy} \geq 2\sqrt{xy \times \left(\frac{4}{xy}\right)} = 4$$

$$\therefore \text{최솟값} : 20 + 3 \times 4 = 32$$

6. $\frac{x}{5} = \frac{y+4z}{2} = \frac{z}{3} = \frac{-x+2y}{A}$ 에서 A 의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $A = -25$

해설

$$\begin{aligned} & \frac{-x+2(y+4z)-8 \times z}{-5+2 \times 2-8 \times 3} \\ &= \frac{-x+2y+8z-8z}{-5+4-24} = \frac{-x+2y}{-25} \\ & \therefore A = -25 \end{aligned}$$

7. 원 $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 6 = 0$ 을 x 축 방향으로 p 만큼, y 축방향으로 q 만큼 평행이동시키면 원 $x^2 + y^2 - 2x + 6y + c = 0$ 이 된다. 이 때, $pq + c$ 의 값은?

① -2 ② -4 ③ -6 ④ -8 ⑤ -10

해설

원을 평행이동시키면 반지름의 길이는 변하지 않고, 중심좌표만 변한다.

$$x^2 + y^2 + 2x - 2y - 6 = 0$$

$$\Rightarrow (x+1)^2 + (y-1)^2 = 8$$

$$x^2 + y^2 - 2x + 6y + c = 0$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 + (y+3)^2 = 10 - c$$

$\therefore (-1, 1) \rightarrow (1, -3)$ 이므로, x 축으로 2만큼, y 축으로 -4 만큼 평행이동한 것이고, $8 = 10 - c$ 에서 $c = 2$ 이다.

$$\therefore pq + c = 2 \cdot (-4) + 2 = -6$$

8. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 의 부분집합 중 적어도 하나의 홀수를 포함하는 부분집합의 개수를 구하시오.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 28개

해설

전체의 부분집합에서 짝수만을 원소로 가지는 부분집합은 제외한다.

$\therefore 2^5 - 2^2 = 28(\text{개})$

9. 함수 $f(x) = x + 3$ 에 대하여 $f^1 = f$, $f^{n+1} = f \circ f^n (n = 1, 2, 3, \dots)$ 으로 정의할 때, $f^{100}(100)$ 의 값은?

① 300 ② 400 ③ 500 ④ 600 ⑤ 700

해설

$f^1(x) = x + 3$
 $f^2(x) = f(f^1(x)) = f(x + 3) = x + 6$
 $f^3(x) = f(f^2(x)) = f(x + 6) = x + 9$
 $\vdots$ 이므로
 $f^n(x) = x + 3n (n = 1, 2, 3, \dots)$ 으로
추정할 수 있다.
따라서, $f^{100}(x) = x + 300$ 이므로
 $f^{100}(100) = 100 + 300 = 400$

10. $A = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}}$, $B = \frac{2}{2 + \frac{2}{2 + \frac{2}{x}}}$, $C = \frac{3}{3 + \frac{3}{3 + \frac{3}{x}}}$ 에 대하여 $x = \frac{2}{5}$

일 때의 A, B, C 의 대소 관계를 순서대로 옳게 나타낸 것은?

- ① $A > B > C$

② $A \geq B = C$

③ $A < B < C$

④ $A \leq B = C$

⑤ $A = B = C$

해설

$$A = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{5}{2}}} = \frac{1}{1 + \frac{5}{7}}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{5}{7}} = \frac{1}{\frac{12}{7}} = \frac{7}{12}$$

$$B = \frac{2}{2 + \frac{2}{2 + \frac{2}{x}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{5}{2}}} = \frac{1}{1 + \frac{2}{9}} = \frac{9}{11}$$

$$C = \frac{3}{3 + \frac{3}{3 + \frac{3}{x}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{5}{3}}} = \frac{1}{1 + \frac{3}{14}} = \frac{14}{17}$$

$$\therefore A = \frac{7}{12}, B = \frac{9}{11}, C = \frac{14}{17}$$

$$\therefore A < B < C$$