1. 집합 A 의 진부분집합의 개수가 31 개일 때, $n(A)$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

진부분집합은 자기 자신을 제외한 모든 부분집합이므로,
(진부분집합의 수)= (부분집합의 수)–1 이 된다.
따라서 집합 A 의 부분집합의 개수는 $31 + 1 = 32$ 개이며,
$2^n = 32 \ \therefore n = 5$ 이다.

2. 다음 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이를 구하여라.

$(0,0),\ (2,6),\ (6,3)$

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

$\frac{1}{2}|2\cdot 3-6\cdot 6| = 15$

3. 점 $(-1, -2)$ 를 x 축의 방향으로 6 만큼 평행이동한 다음 직선 $x = a$ 에 대하여 대칭이동하면 처음 위치로 돌아온다. 이 때, 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

먼저 점 $(-1, -2)$ 를 x 축의 방향으로 6 만큼
평행이동한 점의 좌표는
$(-1 + 6, -2)$, 즉 $(5, -2)$
점 $(5, -2)$ 를 다시 직선 $x = a$ 에 대하여
대칭이동한 점의 좌표는
$(2a - 5, -2)$
이 때, 이것이 $(-1, -2)$ 와 같으므로 $2a - 5 = -1$
$\therefore a = 2$

4. 다음 중 항상 참이라고 할 수 없는 것은?

① 자연수 n에 대하여, n^2이 짝수이면 n도 짝수 이다.

② 자연수 $n,\ m$에 대하여 n^2+m^2이 홀수이면, nm은 짝수이다.

③ 자연수 n에 대하여, n^2이 3의 배수이면, n은 3의 배수이다.

④ $a,\ b$가 실수일 때, $a+b\sqrt{2}=0$이면, $a=0$이다.

⑤ 두 실수 $a,\ b$에 대하여, $a+b>2$이면, $a>1$ 또는 $b>1$

해설

①, ③ : n^2이 p의 배수이면, n은 p의 배수이다. (참)
② : 대우는 'nm은 홀수이면 n^2+m^2이 짝수이다.' nm은 홀수, 즉 n, m 모두 홀수이면 n^2, m^2 모두 홀수이므로 n^2+m^2은 짝수이다.
∴ 주어진 명제는 참
④ 반례 : $a=2\sqrt{2}, b=-1$
※ 주의) 주어진 명제가 참일 때는 $a,\ b$가 유리수라는 조건일 때임을 명심해야 한다.
⑤ 대우 : $a \leqq 1$ 그리고 $b \leqq 1$이면 $a+b \leqq 2$ (참)

5. $x>0, y>0$ 일 때, $\left(3x+\frac{2}{y}\right)\left(y+\frac{6}{x}\right)$ 의 최솟값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 32

해설

$$\left(3x+\frac{2}{y}\right)\left(y+\frac{6}{x}\right)=20+3\left(xy+\frac{4}{xy}\right)$$

산술기하조건을 사용하면

$$xy+\frac{4}{xy}\geq 2\sqrt{xy\times\left(\frac{4}{xy}\right)}=4$$

$\therefore$ 최솟값 : $20+3\times 4=32$

6. $\frac{x}{5} = \frac{y+4z}{2} = \frac{z}{3} = \frac{-x+2y}{A}$ 에서 A 의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $A = -25$

해설

$$\frac{-x+2(y+4z)-8\times z}{-5+2\times 2-8\times 3}$$

$$= \frac{-x+2y+8z-8z}{-5+4-24} = \frac{-x+2y}{-25}$$

$$\therefore A = -25$$

7. 원 $x^2+y^2+2x-2y-6=0$을 x축 방향으로 p만큼, y축방향으로 q만큼 평행이동시키면 원 $x^2+y^2-2x+6y+c=0$이 된다. 이 때, $pq+c$의 값은?

① -2 ② -4 ③ -6 ④ -8 ⑤ -10

해설

원을 평행이동시키면 반지름의 길이는 변하지 않고, 중심좌표만 변한다.

$x^2+y^2+2x-2y-6=0$

$\Rightarrow (x+1)^2+(y-1)^2=8$

$x^2+y^2-2x+6y+c=0$

$\Rightarrow (x-1)^2+(y+3)^2=10-c$

$\therefore (-1,\ 1)\rightarrow(1,\ -3)$이므로, x축으로 2만큼, y축으로 -4만큼 평행이동한 것이고, $8=10-c$에서 $c=2$이다.

$\therefore\ pq+c=2\cdot(-4)+2=-6$

8. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$의 부분집합 중 적어도 하나의 홀수를 포함하는 부분집합의 개수를 구하시오.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 28 개

해설

전체의 부분집합에서 짝수만을 원소로 가지는 부분집합은 제외한다.

$\therefore\ 2^5 - 2^2 = 28$(개)

9. 함수 $f(x)=x+3$ 에 대하여 $f^1=f,\ f^{n+1}=f\circ f^n(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ 으로 정의할 때, $f^{100}(100)$ 의 값은?

① 300 ② 400 ③ 500 ④ 600 ⑤ 700

해설

$f^1(x)=x+3$

$f^2(x)=f(f^1(x))=f(x+3)=x+6$

$f^3(x)=f(f^2(x))=f(x+6)=x+9$

⋮ 이므로

$f^n(x)=x+3n(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ 으로 추정할 수 있다.

따라서, $f^{100}(x)=x+300$ 이므로

$f^{100}(100)=100+300=400$

10. $A=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}$, $B=\dfrac{2}{2+\dfrac{2}{2+\dfrac{2}{x}}}$, $C=\dfrac{3}{3+\dfrac{3}{3+\dfrac{3}{x}}}$ 에 대하여 $x=\dfrac{2}{5}$ 일 때의 A, B, C 의 대소 관계를 순서대로 옳게 나타낸 것은?

① $A>B>C$ ② $A\geq B=C$ ③ $A<B<C$

④ $A\leq B=C$ ⑤ $A=B=C$

해설

$$A=\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{2}{5}}}=\frac{1}{1+\frac{5}{2}}$$

$$=\frac{1}{1+\frac{2}{7}}=\frac{1}{\frac{9}{7}}=\frac{7}{9}$$

$$B=\frac{2}{2+\frac{2}{2+\frac{2}{x}}}=\frac{1}{1+\frac{1}{2+5}}=\frac{1}{\frac{8}{7}}=\frac{7}{8}$$

$$C=\frac{3}{3+\frac{3}{3+\frac{3}{x}}}=\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{21}{2}}}=\frac{1}{\frac{23}{21}}=\frac{21}{23}$$

$\therefore A=\dfrac{21}{27}, B=\dfrac{21}{24}, C=\dfrac{21}{23}$

$\therefore A<B<C$