1. $x > 2$일 때 $4x + \dfrac{1}{x-2}$의 최솟값은?

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

해설

$x - 2 = t$ 로 놓으면 $t > 0$이고 $x = t + 2$
따라서 주어진 식을 t로 나타낸 다음 산술평균과 기하평가의 관계를 이용하면

$$\begin{aligned} 4x + \frac{1}{x-2} &= 4(t+2) + \frac{1}{t} \\ &= 4t + \frac{1}{t} + 8 \\ &\geq 2\sqrt{4t + \frac{1}{t}} + 8 \\ &= 12 \end{aligned}$$

(단, 등호는 $4t = \dfrac{1}{t}$ 일 때 성립)

2. 함수 $y=\frac{x+3}{x-3}$ 은 $y=\frac{6}{x}$ 을 x 축, y 축의 방향으로 각각 m , n 만큼 평행이동한 것이다. $m+n$ 의 값을 구하여라

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$y=\frac{x+3}{x-3}=1+\frac{6}{x-3}$

$y=\frac{6}{x}$ 의 그래프를

x 축으로 3 , y 축으로 1 만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $m=3,\ n=1$

$m+n=4$

3. 좌표평면에서 점 $A(5,\ 3)$을 직선 $x+y-3=0$ 에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는?

① $(3,\ 1)$　　② $(2,\ -1)$　　③ $(0,\ -2)$

④ $\left(\frac{3}{2},\ \frac{1}{2}\right)$　　⑤ $(-1,\ 3)$

해설

구하고자 하는 점의 좌표를 $A'(a,\ b)$ 라 할 때,

두 점의 중점 $\left(\frac{a+5}{2}, \frac{b+3}{2}\right)$ 는

직선 $x+y-3=0$ 위에 있으므로

대입하여 정리하면 $a+b=-2$ ……㉠

점 A 와 A′ 를 지나는 직선과 직선

$x+y-3=0$ 은 직교하므로

$\frac{b-3}{a-5}\times(-1)=-1$ 에서 $a-b=2$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=0,\ b=-2$ 이므로 $(0,\ -2)$ 가 된다.

4. 두 집합 $A=\{a,c\}$, $B=\{a,b,c,d,e\}$ 에 대하여 집합 X 는 집합 B 에 포함되고, 집합A 는 집합 X 에 포함될 때, 이를 만족하는 집합 X 의 개수는?

① 2 개　② 4 개　③ 6 개　④ 8 개　⑤ 10 개

해설

집합 X는 집합 B의 부분집합 중 원소 a, c를 모두 포함하는 집합이므로
구하는 집합 X의 개수는 $2^{5-2}=2^3=8$ (개)

5. 집합 $A = \{1,\ 3,\ 6,\ 8\}$, $B = \{1,\ 3,\ 5,\ 8\}$ 에 대하여 $(A \cap B) \cup X = X$, $(A \cup B) \cap X = X$ 를 만족하는 집합 X 의 개수를 구하면?

① 16 개　② 8 개　③ 4 개　④ 2 개　⑤ 1 개

해설

$(A \cap B) \cup X = X$ 이므로 $(A \cap B) \subset X$
$(A \cup B) \cap X = X$ 이므로 $X \subset (A \cup B)$
$\therefore\ (A \cap B) \subset X \subset (A \cup B)$
$\therefore\ \{1,\ 3,\ 8\} \subset X \subset \{1,\ 3,\ 5,\ 6,\ 8\}$
집합 X 는 원소 1, 3, 8 을 반드시 포함하는 집합 $\{1,\ 3,\ 5,\ 6,\ 8\}$ 의 부분집합이다.
$\therefore\ 2^{5-3} = 2^2 = 4$(개)

6. 집합 $X = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ 에 대하여 함수 f 는 X 에서 X 로의 일대일 대응이다. $f(1) = 4$ 일 때,$f(2) + f(3) + f(4)$ 의 값은?

① 6　　② 7　　③ 8　　④ 9　　⑤ 10

해설

$X = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ 에 대하여
함수 f 는 X 에서 X 로의 일대일 대응이고
$f(1) = 4$ 이므로 $\left\{f(2), f(3), f(4)\right\} = \{1,\ 2,\ 3\}$
$\therefore f(2) + f(3) + f(4) = 1 + 2 + 3 = 6$

7. 함수 $y = 2|x-1|-2$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

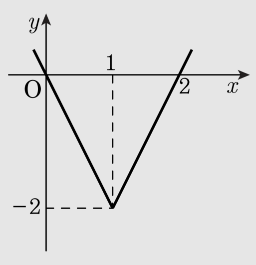
$y = 2|x-1|-2$

(i) $x < 1$ 일 때, $y = -2(x-1)-2 = -2x$

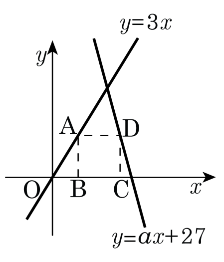
(ii) $x \geq 1$ 일 때, $y = 2(x-1)-2 = 2x-4$

따라서 $y = 2|x-1|-2$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 다음 그림에서

$\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2$



8. 다음 그림과 같이 좌표평면 위에 한 변의 길이가 3인 정사각형 ABCD가 있다. 일차함수 $y = 3x$ 의 그래프가 점 A 를 지나고, 일차함수 $y = ax + 27$ 의 그래프가 점 D를 지날 때, 기울기 a 의 값은? (단, 두 점 B, C는 x축 위의 점이다.)



① -4　② $-\frac{9}{2}$　③ -5
④ $-\frac{11}{2}$　⑤ -6

해설

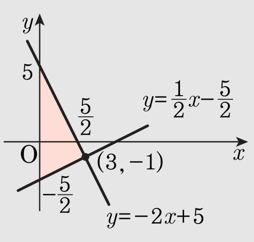
$\overline{AB} = 3$ 이므로 점 A 의 y 좌표는 3 이고,
점 A는 일차함수 $y = 3x$ 의 그래프 위의 점이므로 x 좌표가 1 이다.
점 A와 x 좌표가 같은 점 B의 좌표는 $(1,\ 0)$ 이고, $\overline{BC} = 3$ 이므로 점 C의 좌표는 $(4,\ 0)$ 이다.
점 C 와 x 좌표가 같고, 점 A 와 y 좌표가 같은 점 D 의 좌표는 $(4,\ 3)$ 이다.
점 D가 일차함수 $y = ax + 27$ 위의 점이므로 $x = 4$, $y = 3$를 대입하면 $3 = a \times 4 + 27$
$\therefore\ a = -6$

9. 점 $(3, -1)$ 에서 원 $x^2+y^2=5$ 에 그은 두 접선과 y축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이를 S 라 할 때, $4S$ 의 값은?

① 33　② 35　③ 45　④ 49　⑤ 55

해설

접선의 기울기를 m이라고 하면 점 $(3, -1)$ 에서
원에 그은 접선의 방정식을 $y+1=m(x-3)$ 이라 하자.
이 때, 원의 중심 $(0, 0)$ 에서 직선 $y+1=m(x-3)$,



즉 $mx-y-3m-1=0$ 에 이르는 거리가
반지름의 길이 $\sqrt{5}$와 같으므로

$\frac{|-3m-1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$, $|3m+1|=\sqrt{5(m^2+1)}$

양변을 제곱하여 정리하면 $2m^2+3m-2=0$, $(2m-1)(m+2)=0$

$\therefore m=\frac{1}{2}$ 또는 $m=-2$

즉, 구하는 접선의 방정식은

$y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$, $y=-2x+5$

따라서 구하는 삼각형의 넓이 S 는

$S=\frac{1}{2}\times\left\{5-\left(-\frac{5}{2}\right)\right\}\times 3=\frac{45}{4}$

$\therefore 4S=45$

10. 원 O : $x^2+(y-1)^2=1$을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 원을 O′이라고 하자. 두 원 O, O′ 의 교점을 각각 A, B 라 할 때, 점 $(6,\ 2)$ 를 직선 AB에 대하여 대칭이동한 점이 $(a,\ b)$ 이다. 이 때, ab의 값을 구하면?

① -8　　② -12　　③ 8　　④ 12　　⑤ 0

해설

원 O : $x^2+(y-1)^2=1$을 x축의 방향으로 -1만큼,
y축의 방향으로 -1만큼 평행이동하면
O′ : $(x+1)^2+y^2=1$
두 원의 방정식을 일반형으로 변형하면
O : $x^2+y^2-2y=0$, O′ : $x^2+y^2+2x=0$
이 때, 직선 AB의 방정식은 $2x+2y=0$,
즉 $y=-x$
따라서 점 $(6,\ 2)$를 직선 $y=-x$에 대하여
대칭이동한 점은 $(-2,\ -6)$이므로
$a=-2,\ b=-6\quad \therefore ab=12$