1. 포물선 $y = x^2 - x + 1$ 위의 점 중에서 직선 $y = x - 3$ 에의 거리가 최소인 점을 $(a,\ b)$ 라 할 때, $a + b$ 의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

직선 $y = x - 3$ 에 평행인 직선 $y = x + k$ 와
포물선 $y = x^2 - x + 1$ 과의 접점이 구하는 점이다.

$x^2 - x + 1 = x + k$ 에서 $\frac{D}{4} = 1 - (1 - k) = 0$

$\therefore\ k = 0$

이때, $x = 1,\ y = 1$ 이므로

구하는 점은 $(1,\ 1)$

$\therefore\ a = 1,\ b = 1$

$\therefore\ a + b = 2$

2. 두 원 $(x+1)^2+y^2=1$, $x^2+y^2-6x-6y+2=0$ 의 공통접선의 개수는?

① 0 개 ② 1 개 ③ 2 개 ④ 3 개 ⑤ 4 개

해설

$(x+1)^2+y^2=1$ 에서 이 원의 중심을 C_1 이라 하면 점 C_1 의 좌표는 $(-1,\ 0)$ 이고 반지름의 길이는 1 이다.
$x^2+y^2-6x-6y+2=0$ 에서 $(x-3)^2+(y-3)^2=16$ 이므로 이 원의 중심을 C_2 이라 하면 점 C_2 의 좌표는 $(3,\ 3)$ 이고 반지름의 길이는 4 이다.
$\overline{C_1C_2}=5$ 이고 두 원의 반지름의 길이는 1, 4 이므로 두 원은 서로 외접하게 된다.
따라서 공통접선은 3 개이다.

3. 평행이동 $f : (x, y) \to (x-1,\ y+3)$에 의하여 점 $(3,\ 1)$은 어떤 점으로 옮겨지는가?

① $(2,\ 4)$ ② $(4,\ 2)$ ③ $(2,\ -4)$

④ $(-2,\ 4)$ ⑤ $(4,\ -2)$

해설

f는 x축의 방향으로 -1, y축의 방향으로 $+3$ 만큼 평행이동하는 변환이므로 $(3-1,\ 1+3) = (2,\ 4)$로 옮겨진다.

4. 함수 $f(x)$가 $f(2x+1)=3x+2$를 만족할 때, $f(3)$의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f(2x+1)=3x+2$ 에서 $2x+1=3$ 이므로
$x=1$ 을 대입하면
$f(2\cdot 1+1)=f(3)=3\cdot 1+2=5$

5. 두 점 A$(-2,\ 5)$, B$(1,\ 1)$과 y축 위의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2$의 최솟값은?

① 12 ② 13 ③ 14 ④ 15 ⑤ 16

해설

점 P의 좌표를 P$(0,\ b)$라 하면

$$\begin{aligned}&\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2\\&=\left[\{0-(-2)\}^2+(b-5)^2\right]\\&\quad+\{(0-1)^2+(b-1)^2\}\\&=2b^2-12b+31\\&=2(b-3)^2+13\end{aligned}$$

따라서 $\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2$은 $b=3$

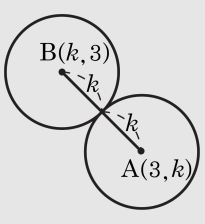
즉 점 P의 좌표가 P$(0,\ 3)$일 때, 최솟값 13을 갖는다.

6. 중심이 $\mathrm{A}(3,k)$ 이고 x 축에 접하는 원 C_1 과 중심이 $\mathrm{B}(k,3)$ 이고 y 축에 접하는 원 C_2 에 대하여 두 원 $\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2$ 가 서로 접할 때, 양수 k 의 값을 구하면?

① $-1+\sqrt{2}$ ② $-2+2\sqrt{2}$ ③ $-3+3\sqrt{2}$
④ $-4+4\sqrt{2}$ ⑤ $-5+5\sqrt{2}$

해설

중심이 $\mathrm{A}(3,k)$ 이고 x 축에 접하는 원은 반지름의 길이가 k 이므로
$\mathrm{C}_1 : (x-3)^2+(y-k)^2=k^2$
중심이 $\mathrm{B}(k,3)$ 이고 y 축에 접하는 원은 반지름의 길이가 k 이므로
$\mathrm{C}_2 : (x-k)^2+(y-3)^2=k^2$
두 원의 중심 A, B 사이의 거리는
$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(k-3)^2+(3-k)^2}=\sqrt{2(k-3)^2}$
이 때, 두 원이 외접하려면 중심거리 $\overline{\mathrm{AB}}$ 가 두 원의 반지름의 길이의 합과 같아야 하므로
$\sqrt{2(k-3)^2}=2k$ 이 식의 양변을 제곱하여 정리하면 $k^2+6k-9=0$
$\therefore k=-3\pm 3\sqrt{2}$ 그런데 k 는 양수이므로
$k=-3+3\sqrt{2}(k=-3-3\sqrt{2}<0)$



7. 직선 $3x+4y+a=0$ 이 원 $x^2+y^2=4$ 와 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 정수 a 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 19 개

해설

직선이 원과 서로 다른 두 점에서 만나려면
원의 중심에서 직선까지의 거리(d) 보다
원의 반지름 (r) 이 크다.

$d=\dfrac{|3\times 0+4\times 0+a|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{|a|}{5}<2=r$

$\dfrac{|a|}{5}<2$, $|a|<10$, $-10<a<10$

$a=-9,\ -8,\ -7,\ -6,\ \cdots,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9$ ∴ 19 개

8. 집합 A, B, C, D 에서 다음 중 성립하지 <u>않는</u> 것은?

① $A \cap (A \cup B) = A$

② $A \cup (A \cap B) = A$

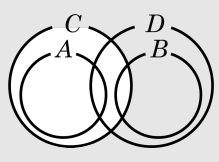
③ $(A - B) - C = A - (B \cup C)$

④ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

⑤ $A \cap B = \varnothing$, $A \subset C$, $B \subset D$ 이면 $C \cap D = \varnothing$ 이다.

해설

⑤ 주어진 조건대로 벤다이어그램을 그려보면 다음과 같을 수 있다. $C \cap D \neq \varnothing$ 이므로 옳지 않다.



9. m이 실수 일 때, $2m^2+\frac{8}{m^2}-2 \geq k$를 만족하는 k의 최댓값을 구하시오.
(단, $m \neq 0$)

▶ 답:

▷ 정답: 6

해설

m이 실수이고, $m \neq 0$이므로 $m^2 > 0$이다.

따라서, $2m^2 + \frac{8}{m^2} - 2 \geq 2\sqrt{2m^2 \cdot \frac{8}{m^2}} - 2$

$= 2\sqrt{16} - 2 = 8 - 2 = 6$

10. $f(x) = \begin{cases} x+5 & (x \geq 0) \\ -x^2+3 & (x < 0) \end{cases}$ 으로 정의된 함수 f 에 대하여 $(f \circ f)(-1) + f^{-1}(2)$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$(f \circ f)(-1) = f(-(-1)^2+3) = f(2) = 2+5 = 7$
$f^{-1}(2) = t$ 라 하면 $f(t) = 2$
그런데 $x+5 \geq 5$ $(\because\ x \geq 0)$ 이고
$-x^2+3 < 3$ $(\because\ x < 0)$ 이므로 $-t^2+3 = 2$
$\therefore\ t = f^{-1}(2) = -1$ $(\because\ t < 0) \cdots$ ㉠
따라서 $(f \circ f)(-1) + f^{-1}(2) = 7 + (-1) = 6$