

1. 포물선 $y = x^2 - x + 1$ 위의 점 중에서 직선 $y = x - 3$ 에의 거리가 최소인 점을 (a, b) 라 할 때, $a + b$ 의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

직선 $y = x - 3$ 에 평행인 직선 $y = x + k$ 와
포물선 $y = x^2 - x + 1$ 과의 접점이 구하는 점이다.

$$x^2 - x + 1 = x + k \text{ 에서 } \frac{D}{4} = 1 - (1 - k) = 0$$

$$\therefore k = 0$$

이때, $x = 1, y = 1$ 이므로

구하는 점은 $(1, 1)$

$$\therefore a = 1, b = 1$$

$$\therefore a + b = 2$$

2. 두 원 $(x+1)^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 2 = 0$ 의 공통접선의 개수는?

① 0 개 ② 1 개 ③ 2 개 ④ 3 개 ⑤ 4 개

해설

$(x+1)^2 + y^2 = 1$ 에서 이 원의 중심을 C_1 이라

하면 점 C_1 의 좌표는 $(-1, 0)$ 이고

반지름의 길이는 1 이다.

$x^2 + y^2 - 6x - 6y + 2 = 0$ 에서

$(x-3)^2 + (y-3)^2 = 16$ 이므로

이 원의 중심을 C_2 이라 하면

점 C_2 의 좌표는 $(3, 3)$ 이고

반지름의 길이는 4 이다.

$\overline{C_1 C_2} = 5$ 이고

두 원의 반지름의 길이는 1, 4 이므로

두 원은 서로 외접하게 된다.

따라서 공통접선은 3 개이다.

3. 평행이동 $f : (x, y) \rightarrow (x-1, y+3)$ 에 의하여 점 $(3, 1)$ 은 어떤 점으로 옮겨지는가?

㉠ $(2, 4)$

㉡ $(4, 2)$

㉢ $(2, -4)$

㉣ $(-2, 4)$

㉤ $(4, -2)$

해설

f 는 x 축의 방향으로 -1 , y 축의 방향으로 $+3$ 만큼 평행이동하는 변환이므로 $(3-1, 1+3) = (2, 4)$ 로 옮겨진다.

4. 함수 $f(x)$ 가 $f(2x+1) = 3x+2$ 를 만족할 때, $f(3)$ 의 값을 구하면?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$f(2x+1) = 3x+2$ 에서 $2x+1 = 3$ 이므로

$x = 1$ 을 대입하면

$f(2 \cdot 1 + 1) = f(3) = 3 \cdot 1 + 2 = 5$

5. 두 점 $A(-2, 5)$, $B(1, 1)$ 과 y 축 위의 점 P 에 대하여 $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$ 의 최솟값은?

① 12 ② 13 ③ 14 ④ 15 ⑤ 16

해설

점 P 의 좌표를 $P(0, b)$ 라 하면

$$\begin{aligned}\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 &= \left[\{0 - (-2)\}^2 + \{b - 5\}^2 \right] \\ &\quad + \left\{ (0 - 1)^2 + (b - 1)^2 \right\} \\ &= 2b^2 - 12b + 31 \\ &= 2(b - 3)^2 + 13\end{aligned}$$

따라서 $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$ 은 $b = 3$

즉 점 P 의 좌표가 $P(0, 3)$ 일 때, 최솟값 13을 갖는다.

6. 중심이 A(3, k) 이고 x 축에 접하는 원 C₁ 과 중심이 B(k, 3) 이고 y 축에 접하는 원 C₂ 에 대하여 두 원 C₁, C₂ 가 서로 접할 때, 양수 k 의 값을 구하면?

- ① $-1 + \sqrt{2}$ ② $-2 + 2\sqrt{2}$ ③ $-3 + 3\sqrt{2}$
 ④ $-4 + 4\sqrt{2}$ ⑤ $-5 + 5\sqrt{2}$

해설

중심이 A(3, k) 이고 x 축에 접하는 원은 반지름의 길이가 k 이므로

$$C_1 : (x - 3)^2 + (y - k)^2 = k^2$$

중심이 B(k, 3) 이고 y 축에 접하는 원은 반지름의 길이가 k 이므로

$$C_2 : (x - k)^2 + (y - 3)^2 = k^2$$

두 원의 중심 A, B 사이의 거리는

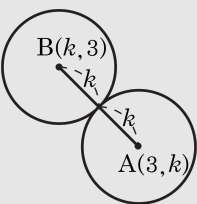
$$\overline{AB} = \sqrt{(k - 3)^2 + (3 - k)^2} = \sqrt{2(k - 3)^2}$$

이 때, 두 원이 외접하려면 중심거리 $\overline{AB}$ 가 두 원의 반지름의 길이의 합과 같아야 하므로

$$\sqrt{2(k - 3)^2} = 2k \text{ 이 식의 양변을 제곱하여 정리하면 } k^2 + 6k - 9 = 0$$

$$\therefore k = -3 \pm 3\sqrt{2} \text{ 그런데 } k \text{ 는 양수이므로}$$

$$k = -3 + 3\sqrt{2} (k = -3 - 3\sqrt{2} < 0)$$



7. 직선 $3x + 4y + a = 0$ 이 원 $x^2 + y^2 = 4$ 와 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 정수 a 의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▶ 정답 : 19개

해설

직선이 원과 서로 다른 두 점에서 만나려면
원의 중심에서 직선까지의 거리(d) 보다
원의 반지름 (r) 이 크다.

$$d = \frac{|3 \times 0 + 4 \times 0 + a|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|a|}{5} < 2 = r$$

$$\frac{|a|}{5} < 2, |a| < 10, -10 < a < 10$$

$a = -9, -8, -7, -6, \dots, 6, 7, 8, 9 \therefore 19 \text{ 개}$

8. 집합 A, B, C, D 에서 다음 중 성립하지 않는 것은?

① $A \cap (A \cup B) = A$

② $A \cup (A \cap B) = A$

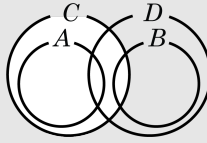
③ $(A - B) - C = A - (B \cup C)$

④ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

⑤ $A \cap B = \emptyset, A \subset C, B \subset D$ 이면 $C \cap D = \emptyset$ 이다.

해설

⑤ 주어진 조건대로 벤다이어그램을 그려보면 다음과 같을 수 있다. $C \cap D \neq \emptyset$ 이므로 옳지 않다.



9. m 이 실수 일 때, $2m^2 + \frac{8}{m^2} - 2 \geq k$ 를 만족하는 k 의 최댓값을 구하시오.
(단, $m \neq 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

m 이 실수이고, $m \neq 0$ 이므로 $m^2 > 0$ 이다.

$$\begin{aligned}\text{따라서, } 2m^2 + \frac{8}{m^2} - 2 &\geq 2\sqrt{2m^2 \cdot \frac{8}{m^2}} - 2 \\ &= 2\sqrt{16} - 2 = 8 - 2 = 6\end{aligned}$$

10. $f(x) = \begin{cases} x+5 & (x \geq 0) \\ -x^2+3 & (x < 0) \end{cases}$ 으로 정의된 함수 f 에 대하여 $(f \circ f)(-1) + f^{-1}(2)$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$$(f \circ f)(-1) = f(-(-1)^2 + 3) = f(2) = 2 + 5 = 7$$

$$f^{-1}(2) = t \text{ 라 하면 } f(t) = 2$$

그런데 $x+5 \geq 5$ ($\because x \geq 0$) 이고

$$-x^2+3 < 3 \text{ ($\because x < 0$) 이므로 } -t^2+3 = 2$$

$$\therefore t = f^{-1}(2) = -1 \text{ ($\because t < 0$)} \cdots \textcircled{A}$$

$$\text{따라서 } (f \circ f)(-1) + f^{-1}(2) = 7 + (-1) = 6$$