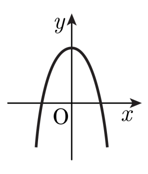
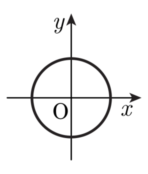
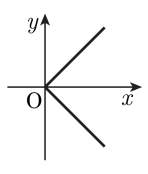
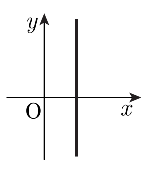
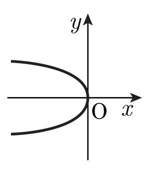
1. 다음 중 함수의 그래프인 것은?

①


②


③


④


⑤


해설

함수는 하나의 x값에 여러 개의 y값이 대응될 수 없다.

2. 실수 x, y에 대하여 $f(xy) = f(x)f(y)$이고 f가 일대일대응일 때, $f(0)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

0이 아닌 x에 대하여 $y = 0$을
$f(xy) = f(x)f(y)$에 대입하자.
$f(0) = f(x)f(0) \Leftrightarrow f(0) - f(0)f(x) = 0$
$\Leftrightarrow f(0)[1 - f(x)] = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$ 또는 $f(x) = 1$
만일 $f(x) = 1$이면
$f(0) = 1$, $f(1) = 1$, $f(2) = 1$,$\cdots$ 이다.
위는 $f(x)$가 일대일대응이라는 것과 모순이므로
$f(x) = 1$은 부적당
$\therefore f(0) = 0$

3. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 세 함수 $f,\ g,\ h$ 에 대하여 $(h \circ g)(x) = 3x+4$, $f(x) = x^2$ 일 때, $(h \circ (g \circ f))(2)$ 의 값을 구하여라.

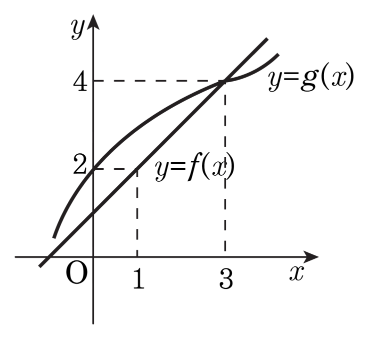
▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$$\begin{aligned}(h \circ (g \circ f))(2) &= ((h \circ g) \circ f)(2) \\ &= (h \circ g)(f(2)) \\ &= (h \circ g)(4) \\ &= 3 \times 4 + 4 = 16\end{aligned}$$

4. 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 각각 일대일대응이고 그 그래프가 다음 그림과 같을 때, $(g^{-1}\circ f)(1)+g(3)$의 값은 얼마인가?



① 2　　② 3　　③ 4　　④ 5　　⑤ 7

해설

주어진 식을 간단히 하면
$(g^{-1}\circ f)(1)+g(3)=g^{-1}(f(1))+4$
$=g^{-1}(2)+4$
$g^{-1}(2)=k$로 놓으면 $g(k)=2$
문제의 그림에서 $y=g(x)$의 그래프가
$(0,2)$를 지나므로 $g(0)=2$
이 때, $y=g(x)$는 일대일대응이므로 $k=0$
$\therefore g^{-1}(2)+4=0+4=4$

5. 함수 $f(x)$ 의 역함수 $f^{-1}(x)$ 가 존재하고 $f(5) = -2$, $(f \circ f)(x) = x$ 일 때, $f^{-1}(5)$ 의 값은?

① -5 ② -2 ③ 1 ④ 2 ⑤ 5

해설

$(f \circ f)(x) = x$ 에서 $f = f^{-1}$
따라서 $f^{-1}(5) = f(5) = -2$

6. 함수 $y=|x-1|-2$ 의 그래프와 직선 $y=mx+m-1$ 이 서로 다른 두 점에서 만나도록 m 의 값의 범위를 구하면?

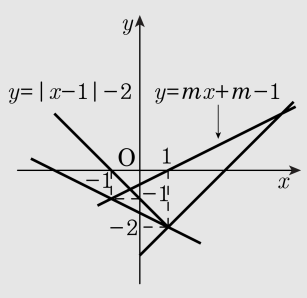
① $-1<m<0$ ② $-\frac{1}{2}<m<1$ ③ $-\frac{1}{4}<m<\frac{1}{2}$

④ $0<m<1$ ⑤ $1<m<2$

해설

$y=|x-1|-2$ 의 그래프는 아래 그림과 같이 점 $(1,\ -2)$ 에서 꺾인 그래프이다.

또, 직선 $y=mx+m-1$ 은 $y=m(x+1)-1$ 에서 m 의 값에 관계없이 점 $(-1,\ -1)$ 을 지나는 직선이다.



따라서, 두 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나기위한 조건은 $-\frac{1}{2}<m<1$

7. 함수 $f(x) = ||x-1|-a|$ 에서 $f(2) = 4$ 를 만족시키는 양의 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$f(2) = 4$ 이므로

$f(2) = ||2-1|-a| = 4 \rightarrow |1-a| = 4$

따라서 $a = -3,\ 5$ 이므로 양수 $a = 5$

8. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $f(x) = x^3 - 2x + 2$, $g(x+2) = f(x+1)$로 정의될 때, $g(0)$의 값은?

① 3　　② 2　　③ 1　　④ 0　　⑤ -1

해설

$g(x+2) = f(x+1)$에서 $g(0)$은 $x = -2$에서의 값이므로 $f(-1)$이다.
따라서 $g(0) = f(-1) = 3$

9. 정의역이 $\{-1,\ 0,\ 1\}$ 일 때, 다음 보기 중 서로 같은 함수를 찾으면?

보기

㉠ $f(x) = \sqrt{x^2}$ ㉡ $g(x) = |x|$

㉢ $h(x) = x^2$ ㉣ $k(x) = x^4 + x^3 + x^2$

① ㉠, ㉡ ② ㉠, ㉢ ③ ㉡, ㉣

④ ㉠, ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

해설

㉠. $f(-1) = \sqrt{(-1)^2} = 1,$

$f(0) = \sqrt{0^2} = 0,$

$f(1) = \sqrt{1^2} = 1$

㉡. $g(x) = |x| = \sqrt{x^2} = f(x)$

㉢. $h(-1) = (-1)^2 = 1,$

$h(0) = 0^2 = 0,$

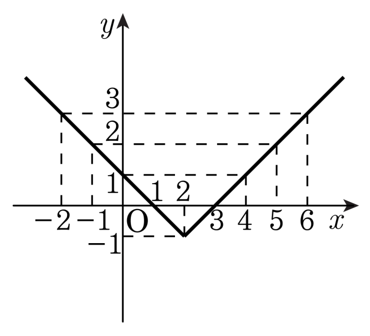
$h(1) = 1^2 = 1$

㉣. $k(-1) = (-1)^4 + (-1)^3 + (-1)^2 = 1,$

$k(0) = 0^4 + 0^3 + 0^2 = 0,$

$k(1) = 1^4 + 1^3 + 1^2 = 3$

10. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 방정식 $f(f(x)) = 0$ 의 모든 근의 합을 구하여라.



▶ 답:

▷ 정답: 8

해설

$f(f(x)) = 0$ 에서 $f(x) = X$ 라 하면
$f(X) = 0$ 이므로 $X = 1$ 또는 $X = 3$
$X = 1$ 즉, $f(x) = 1$ 일 때, $x = 0, 4$
$X = 3$ 즉, $f(x) = 3$ 일 때, $x = -2, 6$
따라서, 모든 근의 합은 $0 + 4 + (-2) + 6 = 8$ 이다.

11. 두 함수 $f(x)=4x-3,\ g(x)=2x+1$ 에 대하여 $h\circ g=f$ 를 만족하는 함수 $h(x)$ 를 구하면?

① $h(x)=x+4$　② $h(x)=2x-5$　③ $h(x)=3x+2$
④ $h(x)=3x+5$　⑤ $h(x)=5x+3$

해설

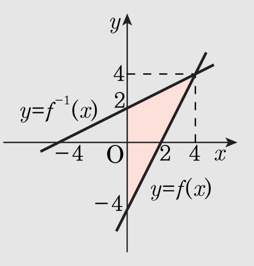
$h(x)=ax+b$ 라고 놓으면
$h\circ g=f$ 에서 $a(2x+1)+b=4x-3$
$\therefore\ 2a=4,\ a+b=-3$
이것을 풀면 $a=2,\ b=-5$
따라서 $h(x)=2x-5$

12. 함수 $f(x) = 2x - 4$ 에 대하여 $f(x)$ 의 역함수를 $f^{-1}(x)$ 라 할 때, 함수 $y = f(x)$ 와 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프 및 y 축으로 둘러싸인 도형의 넓이는?

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

해설

$y = f(x)$ 의 그래프는
두 점 $(0, -4)$, $(2,\ 0)$ 을 지나는 직선이다.
그런데 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와
역함수 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프는
직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로
$y = f^{-1}(x)$ 의 그래프는
두 점 $(-4,\ 0)$,$(0,\ 2)$ 를 지나는 직선이다.
함수 $y = f(x)$ 와 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프의 교점은 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 의 교점과 같으므로 교점의 x 좌표를 구하기 위해 $f(x) = x$ 를 풀면 $2x - 4 = x$
$\therefore x = 4$



따라서 교점의 좌표는 $(4,\ 4)$ 이므로
그림에서 구하는 도형의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 6 \times 4 = 12$

13. 일대일 함수 $x_1 \neq x_2 \to f(x_1) \neq f(x_2)$ 에서 음이 아닌 정수 n 에 대하여 함수 $f(x)$ 가 $f(0)=0,\ f(10n+k)=f(n)+k(k=0,\ 1,\ \cdots,\ 9)$ 를 만족할 때, $f(1994)$ 의 값은?

① 11 ② 15 ③ 23 ④ 26 ⑤ 29

해설

$$\begin{aligned} f(1994) &= f(10\cdot 199+4) = f(199)+4 \\ &= f(10\cdot 19+9)+4 = f(19)+9+4 \\ &= f(10\cdot 1+9)+13 = f(1)+9+13 \\ &= f(10\cdot 0+1)+22 = f(0)+1+22 \\ &= 0+1+22 = 23 \end{aligned}$$

14. 실수 전체의 집합 R에서 R로의 함수 f를 $f : x \to a|x-1|+(2-a)x+a$ 와 같이 정의한다. 함수 f의 역함수가 존재할 때, 상수 a의 값의 범위를 구하면?

① $a < 1$　② $a > 1$　③ $0 < a < 2$

④ $-\frac{1}{2} < a < 2$　⑤ $0 < a < \frac{2}{3}$

해설

역함수가 존재하려면 일대일대응이어야 한다.

$f(x) = a|x-1| + (2-a)x + a$

$$= \begin{cases} 2x & (x \geq 1) \\ (2-2a)x + 2a & (x < 1) \end{cases}$$

가 일대일대응이려면 $x \geq 1$에서 증가함수이므로 $x < 1$에서도 증가함수 이어야 한다.

즉, $2 - 2a > 0$에서 $a < 1$

15. $f(5)=10$, $f(10)=30$ 이고 $g(x)=ax-10$ 인 두 함수$f(x)$, $g(x)$ 에 대하여 $f^{-1}\circ g=f$ 를 만족하는 상수 a의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a=8$

해설

$f\circ(f^{-1}\circ g)=f\circ f$ 에서
$g=f\circ f\cdots$ ㉠
$g(5)=f(f(5))=f(10)=30\cdots$ ㉡
$\therefore\ 5a-10=30$
따라서 구하는 a 의 값은 8 이다.