1. 다음 중에서 집합 $A = \{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$ 과 같은 집합을 모두 고른 것은?

㉠ $\{2n \mid 0 < n < 5$인 정수$\}$

㉡ $\{x \mid x$는 2의 배수$\}$

㉢ $\{2x - 2 \mid x$는 $1 < x \leq 5$인 정수$\}$

㉣ $\{x \mid x$는 8의 양의 약수$\}$

① ㉠, ㉡ ② ㉠, ㉢ ③ ㉡, ㉣ ④ ㉢, ㉣ ⑤ ㉠, ㉣

해설

㉠ 2, 4, 6, 8이므로 가능하다.
㉡ 2, 4, 6, 8, 10, ... 이므로 불가능하다.
㉢ 2, 4, 6, 8이므로 가능하다.
㉣ 1, 2, 4, 8이므로 불가능하다.

2. 다음 중 공집합인 것을 모두 고르면? (정답 2개)

① $\{0\}$
② $\varnothing$
③ $\{x|x \le 2\text{인 짝수}\}$
④ $\{x|1 < x < 2\text{인 자연수}\}$
⑤ $\{\varnothing\}$

해설

③ $\{x|x \le 2\text{인 짝수}\} = \{2\}$
④ 1 과 2 사이에는 자연수가 없으므로 $\{x|1 < x < 2\text{인 자연수}\} = \varnothing$

3. $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ 에서 1, 2가 포함되어 있는 진부분집합의 개수는?

① 4 개 ② 5 개 ③ 6 개 ④ 7 개 ⑤ 8 개

해설

$\{3, 4, 5\}$ 의 부분집합 개수 : $2^3 = 8$(개)
이 중 진부분집합의 개수는 : $8 - 1 = 7$(개)

4. $A = \{a, b, c, d, e\}$ 에서 원소 a를 포함하고 b는 포함하지 않은 부분집합의 개수는?

① 4 개 ② 7 개 ③ 8 개 ④ 9 개 ⑤ 16 개

해설

$2^{5-1-1} = 2^3 = 8$(개)

5. 전체집합 $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ 의 두 부분집합 $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, $B = \{1,\ 3,\ 5,\ 7\}$에 대하여 $A^c \cap B^c$를 구하면?

① $\{1,\ 3\}$　② $\{2,\ 4\}$　③ $\{3,\ 5\}$　④ $\{4,\ 8\}$　⑤ $\{6,\ 8\}$

해설

$A \cup B = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 7\}$이고 $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c = U - (A \cup B) = \{6,\ 8\}$

6. $a>0,\ b>0$일 때, 다음 식 $\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{9}{a}\right)$의 최솟값을 구하면?

① 16　② 17　③ 18　④ 19　⑤ 20

해설

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{9}{a}\right)=ab+9+1+\frac{9}{ab}$$
$$=10+ab+\frac{9}{ab}$$
$$\geq 10+2\sqrt{ab\times\frac{9}{ab}}$$
$$=10+6=16$$

따라서 최솟값은 16

7. 다음 (가), (나)에 들어갈 말을 알맞게 나열한 것은?

- $|a| = |b|$ 는 $a = b$ 이기 위한 (가) 조건이다.
- 3의 배수는 6의 배수이기 위한 (나) 조건이다.

① 필요, 필요 ② 필요, 충분
③ 충분, 충분 ④ 충분, 필요
⑤ 충분, 필요충분

해설

$|a| = |b| \quad \overset{\times}{\underset{\circ}{\rightleftarrows}} \quad a = b$ ∴ 필요

$\{x \mid x$는 3의 배수$\} \supset \{x \mid x$는 6의 배수$\}$ ∴ 필요

8. $q > p > 1$인 실수 p, q에 대하여 $pq+p$와 p^2+q의 대소를 비교하면?

① $pq+p < p^2+q$
② $pq+p \le p^2+q$
③ $pq+p > p^2+q$
④ $pq+p \ge p^2+q$
⑤ $pq+p = p^2+q$

해설

$$\begin{aligned}(pq+p)-(p^2+q) &= pq-q-p^2+p \\ &= q(p-1)-p(p-1) \\ &= (p-1)(q-p)\end{aligned}$$

$q > p > 1$이므로 $p-1>0$, $q-p>0$
따라서 $(p-1)(q-p)>0$이므로
$pq+p > p^2+q$

9. $x > 3$일 때 $\frac{3}{x-3}+2+3x$의 최솟값은?

① 3　② 5　③ 12　④ 15　⑤ 17

해설

$\frac{3}{x-3}+2+3x=3(x-3)+\frac{3}{x-3}+11$

이 때, $x>3$이므로 $3(x-3)>0$, $\frac{3}{x-3}>0$

산술평균과 기하평균에 의해

$3(x-3)+\frac{3}{x-3}+11$

$\geq 2\sqrt{3(x-3)\cdot\frac{3}{x-3}}+11$

$=2\cdot 3+11=17$

(단, 등호는 $3(x-3)=\frac{3}{x-3}$, 즉 $x=4$일 때 성립)

따라서 최솟값은 17

10. a, b, x y가 실수이고, $a^2 + b^2 = 8, x^2 + y^2 = 2$일 때 $ax + by$의 최댓값과 최솟값의 곱은?

① -16 ② -4 ③ 0 ④ 4 ⑤ 16

해설

a, b, x, y가 실수이므로
코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$
$8 \times 2 \geq (ax + by)^2$
$\therefore -4 \leq ax + by \leq 4$
(최댓값) $\times$(최솟값)$= -16$

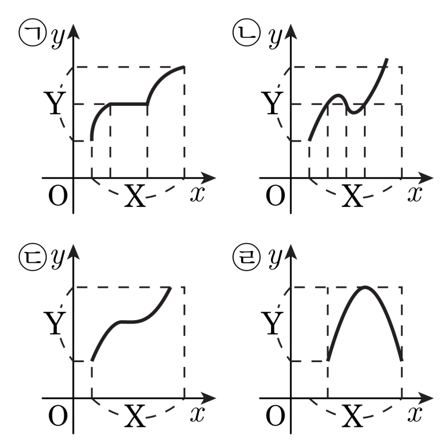
11. 집합 $X = \{-1, 0, 1, 2\}$에 대하여 함수 $f : X \to X$를 $f(x) = |x|$라 하자. 이때 함수 f의 치역의 부분집합의 개수는?

① 2개　② 4개　③ 6개　④ 8개　⑤ 16개

해설

$f(-1) = f(1) = 1,\ f(0) = 0,\ f(2) = 2$이므로 함수 f의 치역은 $\{0, 1, 2\}$이다.
원소의 개수가 3인 집합의 부분집합은 $2^3 = 8$(개)이다.

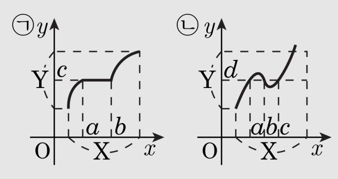
12. 함수 $f : X \to Y$의 그래프가 다음과 같다고 한다. 이 중에서 역함수가 존재하는 것은?



① (ㄱ) (ㄷ) ② (ㄴ) (ㄹ) ③ (ㄷ)
④ (ㄱ) ⑤ (ㄱ) (ㄴ) (ㄹ)

해설

X 에 서 Y 로 의 일 대 일 대 응 을 찾 으 면 된 다.



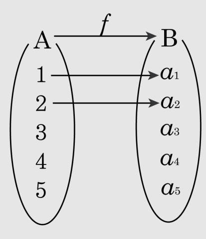
㉠ $\{x | a \le x \le b\}$에 속하는
x의 상이 모두 c이므로
일대일 대응이 아니다.
㉡ $a,\ b,\ c$의 상이 모두 d이므로
일대일 대응이 아니다.
㉣, ㉡의 경우와 같다.

13. 집합 $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ 에서 집합 $B = \{a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5\}$ 로의 대응 f 중 $f(1) = a_1,\ f(2) = a_2$ 인 함수 f 의 개수는?

① 8 개 ② 25 개 ③ 64 개
④ 81 개 ⑤ 125 개

해설

$f(1) = a_1,\ f(2) = a_2$ 인 함수
$f : A \to B$ 는 다음 그림에서 A 의 원소 3, 4, 5 에 B 의 원소 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5$ 중 하나를 각각 대응시키면 된다.
따라서, 구하는 함수의 개수는 $5 \times 5 \times 5 = 125$ (개)



14. 함수 $f(x)$가 $f(2x+1)=3x+2$를 만족할 때, $f(3)$의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f(2x+1)=3x+2$ 에서 $2x+1=3$ 이므로
$x=1$ 을 대입하면
$f(2\cdot 1+1)=f(3)=3\cdot 1+2=5$

15. 두 집합 $A = \{6,\ a,\ 1,\ b,\ 3\}$, $B = \{8,\ c,\ 1,\ d,\ 5\}$ 가 서로 같을 때, $(a+b)-(c+d)$ 의 값으로 옳은 것은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$A = B$ 이므로
$\{6,\ a,\ 1,\ b,\ 3\} = \{8,\ c,\ 1,\ d,\ 5\}$
이 중 1 은 공통이므로 제외하면
$a = 8,\ b = 5$ 또는 $a = 5,\ b = 8$
따라서 $a + b = 13$
$c = 3,\ d = 6$ 또는 $c = 6,\ d = 3$
따라서 $c + d = 9$
$\therefore (a+b)-(c+d) = 4$

16. 두 집합 A, B 에 대해 다음 중 옳은 것은?

① $A \cap \varnothing = A$

② $B \cup \varnothing = \varnothing$

③ $(A \cup B) \subset A$

④ $(A \cap B) \subset B$

⑤ $A = \{0\}$ 일 때, $n(A) = 0$

해설

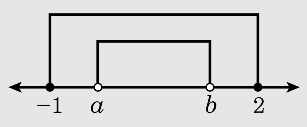
① $A \cap \varnothing = \varnothing$
② $B \cup \varnothing = B$
③ $(A \cup B) \supset A$
⑤ $n(A) = 1$

17. 명제 '$a < x < b$ 이면 $-1 \leq x \leq 2$ 이다.' 가 항상 참일 때, a 의 최솟값과 b 의 최댓값의 합은? (단, $a < b$)

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

명제 '$a < x < b$ 이면 $-1 \leq x \leq 2$ 이다.' 가 참이 되려면 $\{x \mid a < x < b\} \subset \{x \mid -1 \leq x \leq 2\}$ 이어야 하므로 다음 그림에서 $-1 \leq a < 2, -1 < b \leq 2$



따라서, a 의 최솟값과 b 의 최댓값의 합은 $(-1) + 2 = 1$

18. 다음 중 정의역이 $\{0, 1, 2\}$ 인 함수 f 의 그래프가 될 수 있는 것은?

① $\{(0,1),(1,2)\}$
② $\{(0,1),(1,1),(2,1)\}$
③ $\{(1,2),(1,0),(2,2)\}$
④ $\{(0,1),(0,2),(2,0)\}$
⑤ $\{(2,1),(2,2),(2,3)\}$

해설

$f(0)=a,\ f(1)=b,\ f(2)=c$ 라 하면,
함수 f 의 그래프는
$(0,a),(1,b),(2,c)$ 의 꼴이어야 한다.

19. 모든 양수 m,n 에 대하여 함수 $f(x)$ 는 항상 $f(mn) = f(m) + f(n)$ 만족한다.
$f(2) = a, f(3) = b$ 일 때 $f(24)$ 를 a,b 를 써서 나타내면?

① $a+2b$　　② $2a+b$　　③ $2a+3b$

④ $3a+b$　　⑤ $3a+2b$

해설

$f(24) = f(2^3 \cdot 3) = f(2^3) + f(3)$

$f(2^3) = f(2^2 \cdot 2) = f(2^2) + f(2)$

$\quad = \{f(2) + f(2)\} + f(2) = 3f(2)$

따라서 $3f(2) + f(3) = 3a + b$

20. 집합 $A = \{1, a, b\}$를 정의역으로 하는 두 함수 $f(x) = 3x^3 - x,\ g(x) = x^2 + 1$에 대하여 $f = g$일 때, $a + b$의 값은?

① $\frac{2}{3}$　　② 2　　③ $\frac{1}{3}$　　④ -1　　⑤ $-\frac{2}{3}$

해설

$f(1) = g(1),\quad f(a) = g(a),\quad f(b) = g(b)$이어야 하므로
$f(1) - g(1) = 0,\ f(a) - g(a) = 0,\ f(b) - g(b) = 0$이다.
따라서 $1, a, b$는 $f(x) - g(x) = 0$의 세 근이다.
즉 $3x^3 - x^2 - x - 1 = 0$의 세 근의 합은

$1 + a + b = \frac{1}{3}$

$\therefore\ a + b = -\frac{2}{3}$