

1. 다음 중에서 집합 $A = \{2, 4, 6, 8\}$ 과 같은 집합을 모두 고른 것은?

㉠ $\{2n \mid 0 < n < 5 \text{인 정수}\}$

㉡ $\{x \mid x \text{는 } 2 \text{의 배수}\}$

㉢ $\{2x - 2 \mid x \text{는 } 1 < x \leq 5 \text{인 정수}\}$

㉤ $\{x \mid x \text{는 } 8 \text{의 양의 약수}\}$

① ㉠, ㉡

② ㉠, ㉢

③ ㉡, ㉤

④ ㉢, ㉤

⑤ ㉠, ㉤

해설

㉠ 2, 4, 6, 8이므로 가능하다.

㉡ 2, 4, 6, 8, 10, ... 이므로 불가능하다.

㉢ 2, 4, 6, 8이므로 가능하다.

㉤ 1, 2, 4, 8이므로 불가능하다.

2. 다음 중 공집합인 것을 모두 고르면? (정답 2개)

① $\{0\}$

② $\emptyset$

③ $\{x|x \leq 2 \text{인 짝수}\}$

④ $\{x|1 < x < 2 \text{인 자연수}\}$

⑤ $\{\emptyset\}$

해설

③ $\{x|x \leq 2 \text{인 짝수}\} = \{2\}$

④ 1 과 2 사이에는 자연수가 없으므로 $\{x|1 < x < 2 \text{인 자연수}\} = \emptyset$

3. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에서 1, 2가 포함되어 있는 진부분집합의 개수는?

① 4개

② 5개

③ 6개

④ 7개

⑤ 8개

해설

$\{3, 4, 5\}$ 의 부분집합 개수 : $2^3 = 8(\text{개})$

이 중 진부분집합의 개수는 : $8 - 1 = 7(\text{개})$

4. $A = \{a, b, c, d, e\}$ 에서 원소 a 를 포함하고 b 는 포함하지 않은 부분집합의 개수는?

① 4 개

② 7 개

③ 8 개

④ 9 개

⑤ 16 개

해설

$$2^{5-1-1} = 2^3 = 8(\text{개})$$

5. 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ 의 두 부분집합 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 3, 5, 7\}$ 에 대하여 $A^c \cap B^c$ 를 구하면?

- ① $\{1, 3\}$ ② $\{2, 4\}$ ③ $\{3, 5\}$ ④ $\{4, 8\}$ ⑤ $\{6, 8\}$

해설

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\} \text{ 이고 } A^c \cap B^c = (A \cup B)^c = U - (A \cup B) = \{6, 8\}$$

6. $a > 0$, $b > 0$ 일 때, 다음 식 $\left(a + \frac{1}{b}\right) \left(b + \frac{9}{a}\right)$ 의 최솟값을 구하면?

①

16

② 17

③ 18

④ 19

⑤ 20

해설

$$\begin{aligned}\left(a + \frac{1}{b}\right) \left(b + \frac{9}{a}\right) &= ab + 9 + 1 + \frac{9}{ab} \\ &= 10 + ab + \frac{9}{ab} \\ &\geq 10 + 2\sqrt{ab \times \frac{9}{ab}} \\ &= 10 + 6 = 16\end{aligned}$$

따라서 최솟값은 16

7. 다음 (가), (나)에 들어갈 말을 알맞게 나열한 것은?

- $|a| = |b|$ 는 $a = b$ 이기 위한 (가) 조건이다.
- 3의 배수는 6의 배수이기 위한 (나) 조건이다.

① 필요, 필요

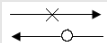
② 필요, 충분

③ 충분, 충분

④ 충분, 필요

⑤ 충분, 필요충분

해설

$|a| = |b|$  $a = b \therefore$ 필요

$\{x \mid x \text{는 } 3 \text{의 배수}\} \supset \{x \mid x \text{는 } 6 \text{의 배수}\} \therefore$ 필요

8. $q > p > 1$ 인 실수 p, q 에 대하여 $pq + p$ 와 $p^2 + q$ 의 대소를 비교하면?

① $pq + p < p^2 + q$

② $pq + p \leq p^2 + q$

③ $pq + p > p^2 + q$

④ $pq + p \geq p^2 + q$

⑤ $pq + p = p^2 + q$

해설

$$\begin{aligned}(pq + p) - (p^2 + q) &= pq - q - p^2 + p \\&= q(p - 1) - p(p - 1) \\&= (p - 1)(q - p)\end{aligned}$$

$q > p > 1$ 이므로 $p - 1 > 0$, $q - p > 0$

따라서 $(p - 1)(q - p) > 0$ 이므로

$$pq + p > p^2 + q$$

9. $x > 3$ 일 때 $\frac{3}{x-3} + 2 + 3x$ 의 최솟값은?

① 3

② 5

③ 12

④ 15

⑤ 17

해설

$$\frac{3}{x-3} + 2 + 3x = 3(x-3) + \frac{3}{x-3} + 11$$

이 때, $x > 3$ 이므로 $3(x-3) > 0$, $\frac{3}{x-3} > 0$

산술평균과 기하평균에 의해

$$\begin{aligned} & 3(x-3) + \frac{3}{x-3} + 11 \\ & \geq 2\sqrt{3(x-3) \cdot \frac{3}{x-3}} + 11 \\ & = 2 \cdot 3 + 11 = 17 \end{aligned}$$

(단, 등호는 $3(x-3) = \frac{3}{x-3}$, 즉 $x = 4$ 일 때 성립)

따라서 최솟값은 17

10. a, b, x, y 가 실수이고, $a^2 + b^2 = 8, x^2 + y^2 = 2$ 일 때 $ax + by$ 의 최댓값과 최솟값의 곱은?

① -16

② -4

③ 0

④ 4

⑤ 16

해설

a, b, x, y 가 실수이므로

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$$

$$8 \times 2 \geq (ax + by)^2$$

$$\therefore -4 \leq ax + by \leq 4$$

$$(\text{최댓값}) \times (\text{최솟값}) = -16$$

11. 집합 $X = \{-1, 0, 1, 2\}$ 에 대하여 함수 $f : X \rightarrow X$ 를 $f(x) = |x|$ 라 하자. 이때 함수 f 의 치역의 부분집합의 개수는?

① 2개

② 4개

③ 6개

④ 8개

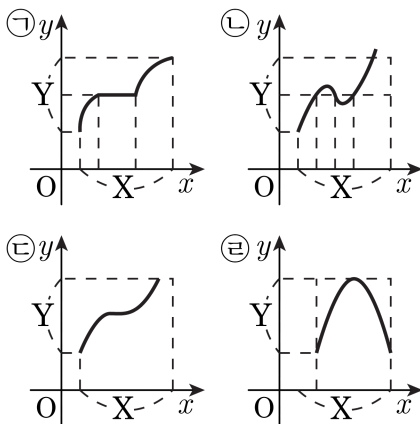
⑤ 16개

해설

$f(-1) = f(1) = 1$, $f(0) = 0$, $f(2) = 2$ 이므로 함수 f 의 치역은 $\{0, 1, 2\}$ 이다.

원소의 개수가 3인 집합의 부분집합은 $2^3 = 8(\text{개})$ 이다.

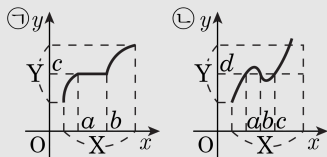
12. 함수 $f: X \rightarrow Y$ 의 그래프가 다음과 같다고 한다. 이 중에서 역함수가 존재하는 것은?



- ① (㉠) (㉢) ② (㉡) (㉣) ③ (㉢) (㉣)
 ④ (㉠) ⑤ (㉠) (㉡) (㉣)

해설

X 에서 Y 로의 일대일 대응을 찾으면 된다.



- ㉠ $\{x|a \leq x \leq b\}$ 에 속하는 x 의 상이 모두 c 이므로 일대일 대응이 아니다.
 ㉡ a, b, c 의 상이 모두 d 이므로 일대일 대응이 아니다.
 ㉢, ㉣의 경우와 같다.

13. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에서 집합 $B = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ 로의 대응 f 중 $f(1) = a_1, f(2) = a_2$ 인 함수 f 의 개수는?

① 8 개

② 25 개

③ 64 개

④ 81 개

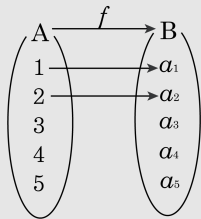
⑤ 125 개

해설

$f(1) = a_1, f(2) = a_2$ 인 함수

$f : A \rightarrow B$ 는 다음 그림에서 A 의 원소 3, 4, 5 에 B 의 원소 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 중 하나를 각각 대응시키면 된다.

따라서, 구하는 함수의 개수는 $5 \times 5 \times 5 = 125$ (개)



14. 함수 $f(x)$ 가 $f(2x+1) = 3x+2$ 를 만족할 때, $f(3)$ 의 값을 구하면?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$f(2x+1) = 3x+2$ 에서 $2x+1 = 3$ 이므로

$x = 1$ 을 대입하면

$$f(2 \cdot 1 + 1) = f(3) = 3 \cdot 1 + 2 = 5$$

15. 두 집합 $A = \{6, a, 1, b, 3\}$, $B = \{8, c, 1, d, 5\}$ 가 서로 같을 때,
 $(a + b) - (c + d)$ 의 값으로 옳은 것은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$A = B$ 이므로

$$\{6, a, 1, b, 3\} = \{8, c, 1, d, 5\}$$

이 중 1 은 공통이므로 제외하면

$$a = 8, b = 5 \text{ 또는 } a = 5, b = 8$$

$$\text{따라서 } a + b = 13$$

$$c = 3, d = 6 \text{ 또는 } c = 6, d = 3$$

$$\text{따라서 } c + d = 9$$

$$\therefore (a + b) - (c + d) = 4$$

16. 두 집합 A, B 에 대해 다음 중 옳은 것은?

① $A \cap \emptyset = A$

② $B \cup \emptyset = \emptyset$

③ $(A \cup B) \subset A$

④ $(A \cap B) \subset B$

⑤ $A = \{0\}$ 일 때, $n(A) = 0$

해설

① $A \cap \emptyset = \emptyset$

② $B \cup \emptyset = B$

③ $(A \cup B) \supset A$

⑤ $n(A) = 1$

17. 명제 ' $a < x < b$ 이면 $-1 \leq x \leq 2$ 이다.' 가 항상 참일 때, a 의 최솟값과 b 의 최댓값의 합은? (단, $a < b$)

① -2

② -1

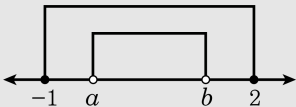
③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

명제 ' $a < x < b$ 이면 $-1 \leq x \leq 2$ 이다.' 가 참이 되려면
 $\{x \mid a < x < b\} \subset \{x \mid -1 \leq x \leq 2\}$ 이어야 하므로 다음 그림에서
 $-1 \leq a < 2, -1 < b \leq 2$



따라서, a 의 최솟값과 b 의 최댓값의 합은 $(-1) + 2 = 1$

18. 다음 중 정의역이 $\{0, 1, 2\}$ 인 함수 f 의 그래프가 될 수 있는 것은?

① $\{(0, 1), (1, 2)\}$

② $\{(0, 1), (1, 1), (2, 1)\}$

③ $\{(1, 2), (1, 0), (2, 2)\}$

④ $\{(0, 1), (0, 2), (2, 0)\}$

⑤ $\{(2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$

해설

$f(0) = a, f(1) = b, f(2) = c$ 라 하면,
함수 f 의 그래프는
 $(0, a), (1, b), (2, c)$ 의 꼴이어야 한다.

19. 모든 양수 m, n 에 대하여 함수 $f(x)$ 는 항상 $f(mn) = f(m) + f(n)$ 만족한다.

$f(2) = a, f(3) = b$ 일 때 $f(24)$ 를 a, b 를 써서 나타내면?

① $a + 2b$

② $2a + b$

③ $2a + 3b$

④ $3a + b$

⑤ $3a + 2b$

해설

$$f(24) = f(2^3 \cdot 3) = f(2^3) + f(3)$$

$$f(2^3) = f(2^2 \cdot 2) = f(2^2) + f(2)$$

$$= \{f(2) + f(2)\} + f(2) = 3f(2)$$

$$\text{따라서 } 3f(2) + f(3) = 3a + b$$

20. 집합 $A = \{1, a, b\}$ 를 정의역으로 하는 두 함수 $f(x) = 3x^3 - x$, $g(x) = x^2 + 1$ 에 대하여 $f = g$ 일 때, $a + b$ 의 값은?

① $\frac{2}{3}$

② 2

③ $\frac{1}{3}$

④ -1

⑤ $-\frac{2}{3}$

해설

$f(1) = g(1)$, $f(a) = g(a)$, $f(b) = g(b)$ 이어야 하므로
 $f(1) - g(1) = 0$, $f(a) - g(a) = 0$, $f(b) - g(b) = 0$ 이다.
따라서 $1, a, b$ 는 $f(x) - g(x) = 0$ 의 세 근이다.

즉 $3x^3 - x^2 - x - 1 = 0$ 의 세 근의 합은

$$1 + a + b = \frac{1}{3}$$

$$\therefore a + b = -\frac{2}{3}$$