1. 실수 x에 대하여 이차방정식 $\frac{x^2}{p}+x+1=0$의 근의 개수를 a개, 이차방정식 $x^2+\frac{x}{p}+\frac{1}{pq}=0$의 근의 개수를 b개라 하자. $a^2+b^2-2a-2b=-2$일 때, $p+q$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 20

해설

$a^2+b^2-2a-2b=-2$ 에서
$(a-1)^2+(b-1)^2=0$ 이므로 $a=1,\ b=1$
즉, $\frac{x^2}{p}+x+1=0$과 $x^2+\frac{x}{p}+\frac{1}{pq}=0$ 이 모두 중근을 가지므로
$D=1-\frac{4}{p}=0$
$\therefore\ p=4$
$D=\frac{1}{p^2}-\frac{4}{pq}=0$
$\therefore\ q=16$
따라서 $p+q=4+16=20$ 이다.

2. 자연수 a, b, c에 대하여 a, c는 10보다 작은 홀수이고, b는 10보다 작은 짝수이다. 이차방정식 $ax^2 - 3bx + 6c = 0$ 의 두 근 p, q 가 $3 \le p < 6 < q \le 9$ 를 만족할 때, $p^2 + q^2$ 의 값을 모두 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 84

▷ 정답 : 60

해설

$ax^2 - 3bx + 6c = 0$ 에서 $p + q = \frac{3b}{a}$, $pq = \frac{6c}{a}$

한편 $3 \le p < 6 < q \le 9$ 에서

$9 < p + q < 15$, $9 < \frac{3b}{a} < 15$

$\therefore\ 3 < \frac{b}{a} < 5$

$a > 0$ 이므로 $3a < b < 5a$

a 는 10 보다 작은 자연수 중 홀수이므로

$a = 1$, $b = 4$

따라서 $pq = 6c$ 이다.

$18 < pq < 54$ 이므로 $18 < 6c < 54$, $3 < c < 9$

c 는 10 보다 작은 홀수인 자연수이므로 $c = 5$, 7

따라서 이차방정식은 $x^2 - 12x + 30 = 0$, $x^2 - 12x + 42 = 0$ 이다.

$p^2 + q^2 = (p + q)^2 - 2pq$ 이므로

$$\begin{aligned} \therefore\ p^2 + q^2 &= 12^2 - 2 \times 30 = 84 \\ &= 12^2 - 2 \times 42 = 60 \end{aligned}$$

3. 변량 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ 의 표준편차가 4, 변량 $2x_1+2, 2x_2+2, \cdots, 2x_n+2$ 의 표준편차를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

변량 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 의 평균을 m 이라 하면

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=m$$

표준편차가 4 이므로

$$\frac{(x_1-m)^2+(x_2-m)^2+\cdots(x_n-m)^2}{m}=4^2=16$$

변량 $2x_1+2, 2x_2+2, \cdots, 2x_n+2$ 의 평균은

$$\frac{(2x_1+2)+(2x_2+2)+\cdots+(2x_n+2)}{n}$$

$$=\frac{2(x_1+x_2+\cdots+x_n)+2n}{n}=2m+2$$

$$\frac{1}{n}\left\{(2x_1+2-2m-2)^2\right\}$$

$$+\frac{1}{n}\left\{(2x_2+2-2m-2)^2\right.$$

$$\left.+\cdots+(2x_n+2-2m-2)^2\right\}$$

$$=4\times\frac{1}{n}\left\{(x_1-m)^2+(x_2-m)^2+\cdots+(x_n-m)^2\right\}$$

$$=64$$

따라서 표준편차는 $\sqrt{64}=8$ 이다.

4. 다음 중 x의 개수가 가장 많은 것을 구하여라.

㉠ $\sqrt{2} < x < \sqrt{4}$, 단 x는 자연수

㉡ $-3\sqrt{2} \le -\sqrt{x} < -2\sqrt{2}$, 단 x는 정수

㉢ $2\sqrt{3} \le \sqrt{x} \le 4$, 단 x는 자연수

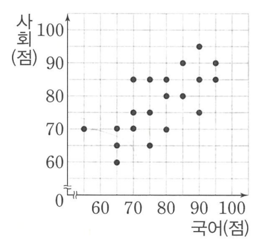
▶ 답 :

▷ 정답 : ㉡

해설

$\sqrt{2} < x < \sqrt{4}$ 이므로 $2 < x^2 < 4$ 이다.
따라서 자연수 x는 없다.
$-3\sqrt{2} \le -\sqrt{x} < -2\sqrt{2}$ 이므로 $\sqrt{8} = 2\sqrt{2} < \sqrt{x} \le 3\sqrt{2} = \sqrt{18}$ 이다.
따라서 $8 < x \le 18$ 이므로
따라서 정수 x의 개수는 10 개이다.
$2\sqrt{3} \le \sqrt{x} \le 4$ 이므로 $12 \le x \le 16$ 이다.
따라서 정수 x의 개수는 5 개이다.

5. 상현이네 반 학생 20명의 국어 점수와 사회 점수를 조사하여 나타낸 산점도이다. 두 과목의 점수의 합이 하위 15% 이내에 드는 학생은 재시험을 보아야 한다. 재시험을 보는 학생들의 사회 점수의 평균을 구하시오.



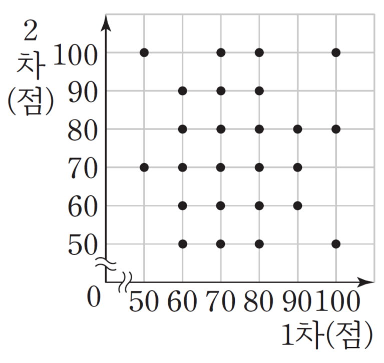
▶ 답 :

▷ 정답 : 65 점

해설

두 과목의 점수의 합이 하위 15% 이내에 드는 학생 수는 3명이다. 이 학생들의 사회 점수는 60점, 65점, 70점이므로 구하는 평균은 65점이다.

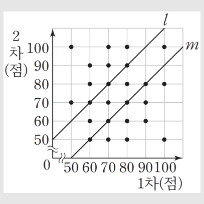
6. 그림은 어느 시험에 응시한 학생 25명의 1차 시험과 2차 시험 점수를 조사하여 나타낸 산점도이다. 1차 시험과 2차 시험 점수의 차가 10점인 학생들의 2차 시험 점수의 평균을 구하시오. (단, 소수점 아래 첫째 자리까지 나타내시오.)



▶ 답 :

▷ 정답 : 71.4 점

해설

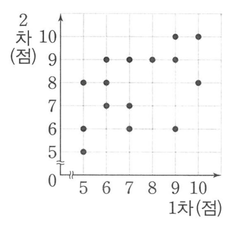


산점도에서 두 직선 위에 있는 점이 1차 시험과 2차 시험 점수의 차가 10점인 학생을 나타내므로 2차 시험 점수의 평균은

$\frac{500}{7} = 71.4285$ 점

따라서 2차 시험 점수의 평균은 71.4 점이다.

7. 민정이네 반 학생 15명의 1차, 2차 영어 듣기 평가 점수를 조사하여 나타낸 산점도이다. 1차 듣기 평가 점수를 a점, 2차 듣기 평가 점수를 b점이라 할 때, $0 \le a-b \le 2$를 만족시키는 학생은 전체의 몇 %인지 구하시오.

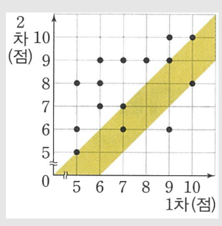


▶ 답 :

▷ 정답 : 40%

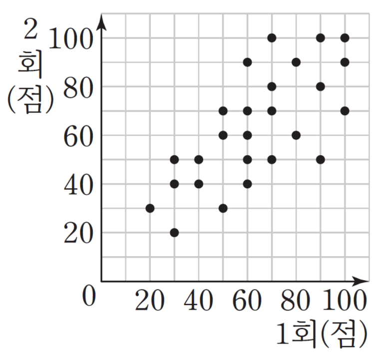
해설

산점도에서 색칠한 부분에 속하는 점의 개수와 그 경계선 위의 점의 개수의 합과 같으므로 6명이다.



$\frac{6}{15} \times 100 = 40\%$

8. 그림은 어느 반 학생 26명이 2회의 걸쳐 실시한 모의고사에서 얻은 수학 성적을 조사하여 나타낸 산점도이다. 다음을 모두 만족시키는 학생 수를 구하시오.



(가) 1회보다 2회의 성적이 하락되었다. (나) 1회와 2회의 성적의 차가 20점 미만이다. (다) 1회와 2회의 성적의 평균이 50점 이상이다.

▶ 답:

▷ 정답: 3명

해설

주어진 조건을 모두 만족시키는 학생 수는 산점도에서 경계선을 제외한 색칠한 부분에 속하는 점의 개수와 같으므로 3명이다.