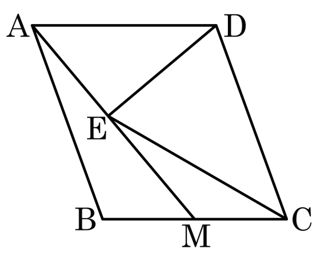
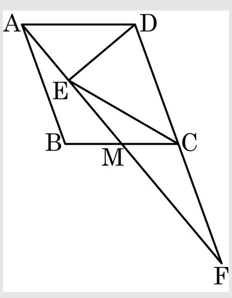
1. 다음 그림과 같은 평행사변형 ABCD 에서 점 M 은 변 BC 의 중점이고, 점 D 에서 선분 AM 에 내린 수선의 발을 E 라 한다. $\angle MAB = 20°$, $\angle B = 110°$ 일 때, $\angle ECM$ 의 크기를 구하여라.



▶ 답: $\underline{\quad\quad}°$

▷ 정답: $30°$

해설

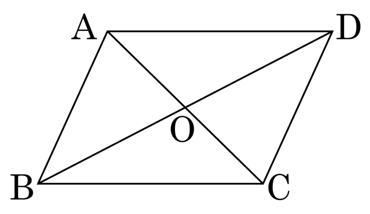


위 그림과 같이 선분 DC 와 AM 의 연장선의 교점을 F 라 하면 $\triangle DEF$ 는 직각삼각형이다.
또, $\triangle FCM \equiv \triangle AMB$ (ASA 합동) 이므로
$\therefore\ \overline{CF} = \overline{AB} = \overline{DC}$
따라서 점 C 는 직각삼각형 DEF 의 빗변의 중점이므로 삼각형 DEF 의 외심이고 $\overline{CD} = \overline{CF} = \overline{CE}$ 이다.

$$\begin{aligned}\angle ECD &= \angle CEF + \angle CFM \\ &= 2\angle CFM \\ &= 2\angle MAB \\ &= 40°\end{aligned}$$

$\angle DCM = 180° - \angle B = 180° - 110° = 70°$
$\therefore\ \angle ECM = \angle DCM - \angle ECD = 70° - 40° = 30°$

2. 다음과 같은 평행사변형 ABCD 에서 두 대각선의 교점을 O 라 할 때, $\angle ACB = 30^\circ$, $\angle DBC = 15^\circ$ 이다. 이때 $\angle ACD$ 와 $\angle BDC$ 의 크기를 차례대로 구하여라.



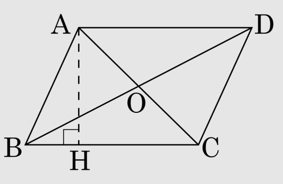
▶ 답: $\underline{\quad\quad}^\circ$

▶ 답: $\underline{\quad\quad}^\circ$

▷ 정답: 105°

▷ 정답: 30°

해설



위의 그림과 같이 점 A 에서 $\overline{BC}$ 에 내린 수선의 발을 H 라 하고 $\overline{OH}$ 를 그으면

$\triangle AHC$ 에서 직각삼각형의 외심은 빗변의 중점이므로

$\overline{OA} = \overline{OC} = \overline{OH}$ 이고

$\angle OAH = \angle AHO = \angle HOA = 60^\circ$

$\triangle OBC$ 에서 $\angle BOA = 15^\circ + 30^\circ = 45^\circ$ 이므로

$\angle BOH = 60^\circ - 45^\circ = 15^\circ$

$\angle HBO = \angle HOB$ 이므로 $\overline{BH} = \overline{OH} = \overline{AH}$

$\triangle ABH$ 는 직각이등변삼각형이므로

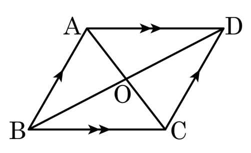
$\angle BAH = 45^\circ$, $\angle ABO = 30^\circ$

$\overline{AB} // \overline{CD}$ 이므로

$\therefore \angle ACD = \angle BAO = 45^\circ + 60^\circ = 105^\circ$,

$\angle BDC = \angle ABO = 30^\circ$

3. 평행사변형 ABCD 의 두 대각선 AB, CD 의 교점을 O 라고 할 때, 다음 중 옳은 것은?

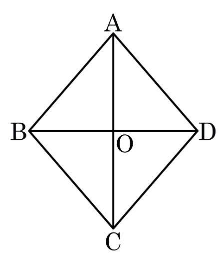


① $\angle\mathrm{OBA} = \angle\mathrm{OCD}$
② $\triangle\mathrm{OAB} \equiv \triangle\mathrm{OAD}$
③ $\overline{\mathrm{OA}} = \overline{\mathrm{OC}}$, $\overline{\mathrm{OB}} = \overline{\mathrm{OD}}$
④ $\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{AD}}$, $\overline{\mathrm{CB}} = \overline{\mathrm{CD}}$
⑤ $\overline{\mathrm{OA}} = \overline{\mathrm{OB}} = \overline{\mathrm{OC}} = \overline{\mathrm{OD}}$

해설

$\triangle\mathrm{AOD}$ 와 $\triangle\mathrm{COB}$ 에서 $\angle\mathrm{DAO} = \angle\mathrm{BCO}$ (엇각)
$\overline{\mathrm{AD}} = \overline{\mathrm{BC}}$ (평행사변형의 대변)
$\angle\mathrm{ADO} = \angle\mathrm{CBO}$ (엇각)
$\therefore\ \triangle\mathrm{AOD} \equiv \triangle\mathrm{COB}$ (ASA 합동)
$\therefore\ \overline{\mathrm{OA}} = \overline{\mathrm{OC}},\ \overline{\mathrm{OB}} = \overline{\mathrm{OD}}$

4. 다음 보기 중 그림과 같은 마름모 ABCD 가 정사각형이 되도록 하는 조건의 개수는?



보기

㉠ $\overline{AC} \perp \overline{BD}$

㉡ $\overline{AO} = \overline{DO}$

㉢ $\overline{AB} = \overline{AD}$

㉣ $\angle ADC = 90°$

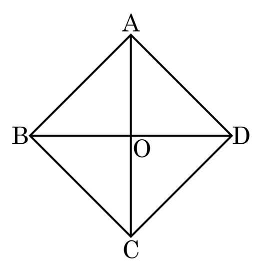
㉤ $\angle ABC = \angle BCD$

① 0 개 ② 1 개 ③ 2 개 ④ 3 개 ⑤ 4 개

해설

마름모가 정사각형이 되려면 한 내각의 크기가 $90°$ 이거나 두 대각선의 길이가 같으면 된다. 따라서 $\overline{AO} = \overline{DO}$, $\angle ADC = 90°$, $\angle ABC + \angle BCD = 180°$ 이므로 $\angle ABC = \angle BCD$ 이면 된다.

5. 다음은 마름모 ABCD 이다. $\overline{AO} = \overline{BO}$ 이고, $\angle A = 90°$ 일 때, □ABCD 는 어떤 사각형이 되는가?

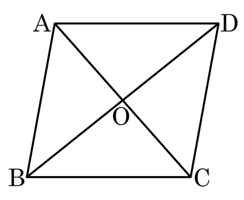


① 사다리꼴
② 등변사다리꼴
③ 직사각형
④ 정사각형
⑤ 평행사변형

해설

마름모에서 두 대각선의 길이가 같고, 내각의 크기가 $90°$ 이면 정사각형이 된다.

6. 다음 그림의 평행사변형 ABCD 가 정사각형이 되기 위한 조건을 모두 고르면? (정답 2 개)



① $\overline{AC} \perp \overline{DB}$, $\angle ABC = 90°$

② $\overline{AO} = \overline{BO}$, $\angle ADO = \angle DAO$

③ $\overline{AC} \perp \overline{DB}$, $\overline{AB} = \overline{AD}$

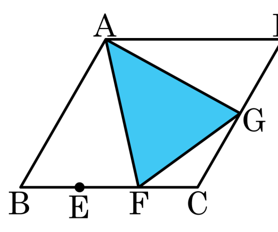
④ $\overline{OA} = \overline{OD}$, $\overline{AB} = \overline{AD}$

⑤ $\overline{AC} = \overline{DB}$, $\angle ABC = 90°$

해설

평행사변형이 정사각형이 되기 위해서는 두 대각선이 서로 수직이등분하고 한 내각의 크기가 90° 이다.
또한 네 변의 길이가 같고, 네 내각의 크기가 같으면 정사각형이다.

7. 다음 그림의 평행사변형 ABCD 의 넓이가 120cm^2 이고 $\overline{BC}$ 의 삼등분점을 E, F, $\overline{CD}$ 의 중점을 G 라 할 때, $\triangle AFG$ 의 넓이를 구하여라.



▶ 답 : ______ cm^2

▷ 정답 : 40 cm^2

해설

$\triangle ABF$ 와 $\triangle AFC$ 에서 높이가 같고 밑변이 $2:1$ 이므로 $\triangle ABF : \triangle AFC = 2:1$

$\triangle ABF = \frac{2}{1+2} \times \triangle ABC = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \square ABCD = 40(\text{cm}^2)$

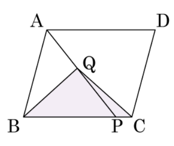
마찬가지 방법으로 $\triangle DFC = \frac{1}{3}\triangle BDC$

$\triangle FCG = \frac{1}{2}\triangle DFC = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}\triangle BDC = \frac{1}{12}\square ABCD = 10(\text{cm}^2)$

$\triangle AGD = \frac{1}{2}\triangle ACD = \frac{1}{4}\square ABCD = 30(\text{cm}^2)$

$\therefore \triangle AFG = \square ABCD - \triangle ABF - \triangle AGD - \triangle FCG = 40(\text{cm}^2)$

8. 다음 그림의 평행사변형 ABCD 에서 $\overline{AP}$ 위의 임의의 점 Q 에 대하여 $\overline{AQ}:\overline{QP}=3:4$, $\square ABCD = 49cm^2$ 일 때, $\triangle QBC$ 의 넓이를 구하여라.



▶ 답 : $\underline{\qquad\qquad cm^2}$

▷ 정답 : $14\,\underline{cm^2}$

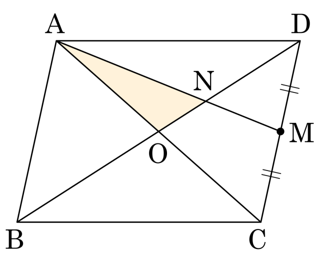
해설

$\overline{QD}$, $\overline{PD}$ 를 그으면

$$\triangle AQD = \frac{3}{7}\triangle APD$$
$$= \frac{3}{7}\times\frac{1}{2}\square ABCD$$
$$= \frac{3}{14}\square ABCD$$
$$= \frac{3}{14}\times 49 = \frac{21}{2}(cm^2)$$

따라서 $\triangle QBC$ 의 넓이는 $\frac{1}{2}\square ABCD - \triangle AQD = \frac{49}{2} - \frac{21}{2} = 14(cm^2)$ 이다.

9. 다음과 같은 평행사변형 ABCD 에서 점 M은 $\overline{\mathrm{CD}}$의 중점이고 $\overline{\mathrm{AN}} : \overline{\mathrm{MN}} = 2 : 1$ 이다. $\square\mathrm{ABCD} = 36\,\mathrm{cm}^2$ 일 때, $\triangle\mathrm{AON}$ 의 넓이를 구하여라.

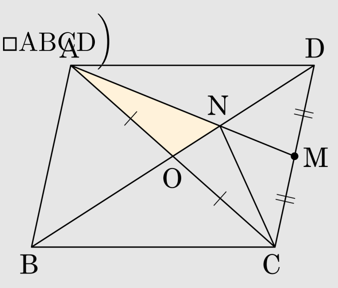


▶ 답 : ______ cm^2

▷ 정답 : $3\,\mathrm{cm}^2$

해설

$\triangle\mathrm{ACM} = \frac{1}{2}\triangle\mathrm{ACD} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} \times \square\mathrm{ABCD}\right)$
$= \frac{1}{4} \times 36 = 9\,\mathrm{cm}^2$



$\triangle\mathrm{ACN} : \triangle\mathrm{NCM} = 2 : 1$ 이므로

$\triangle\mathrm{ACN} = \frac{2}{3}\triangle\mathrm{ACM} = \frac{2}{3} \times 9 = 6(\mathrm{cm}^2)$

$\triangle\mathrm{AON} : \triangle\mathrm{CON} = 1 : 1$ 이므로

$\triangle\mathrm{AON} = \frac{1}{2} \times \triangle\mathrm{ACN} = \frac{1}{2} \times 6 = 3(\mathrm{cm}^2)$