

1. 점 $A(2,3)$ 에서 직선 $y = -1$ 까지의 거리는 ()이고, 직선 $x = -2$ 까지의 거리는 ()이다. 위의 ()안에 알맞은 값을 차례로 나열한 것은?

- ① 2, 3 ② 3, 2 ③ 3, 3 ④ 4, 3 ⑤ 4, 4

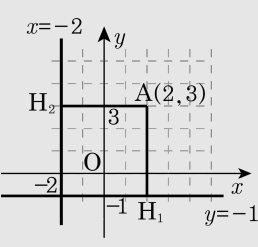
해설

다음 그림에서 점 A에서 $y = -1$ 에 내린 수선의발을 H_1 이라 하면

$\overline{AH_1} = 4$ 이다.

또한 $x = -2$ 에 내린 수선의 발을 H_2 라고 하면

$\overline{AH_2} = 4$ 이다.



2. 세 직선 $x+y-1=0$, $x+ay+3=0$, $x-y-3=0$ 이 한 점에서 만날 때, 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

두 직선 $x+y-1=0$, $x-y-3=0$ 의 교점을 구하면 $(2, -1)$ 이고,
이 점을 직선 $x+ay+3=0$ 이 지나면 되므로 $2+a \cdot (-1)+3=0$
 $\therefore a=5$

3. 두 집합 $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수
중 일대일 대응인 것의 개수를 구하면?

- ① 2
- ② 3
- ③ 4
- ④ 5
- ⑤ 6

해설

a, b, c 에 대응하는 원소를
순서쌍 $(f(a), f(b), f(c))$ 으로 나타내면
 $(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2),$
 $(3, 2, 1)$ 이므로
 X 에서 Y 로의 함수 중 일대일 대응인 것의 개수는 6개이다.

4. x 축 위의 점 P로부터 두 직선 $2x - y + 1 = 0$, $x - 2y - 2 = 0$ 까지의 거리가 같다. 점 P의 좌표를 $(a, 0)$, $(b, 0)$ 이라 할 때 $-ab$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

P의 좌표를 $(\alpha, 0)$ 이라 하면

P에서 두 직선까지의 거리가 같으므로

$$\frac{|2\alpha + 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|\alpha - 2|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}}$$

$$\therefore |2\alpha + 1| = |\alpha - 2|$$

$$\therefore 2\alpha + 1 = \pm(\alpha - 2)$$

$$\therefore \alpha = \frac{1}{3}, -3$$

$$\therefore \left(\frac{1}{3}, 0\right), (-3, 0) \text{ 이므로}$$

$$-ab = -\frac{1}{3} \times -3 = 1$$

5. 좌표평면 위에서 원점과 직선 $x - y - 3 + k(x + y) = 0$ 사이의 거리를 $f(k)$ 라 할 때, $f(k)$ 의 최댓값은? (단, k 는 상수이다.)

- ① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{6}}{2}$ ④ $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $\frac{3\sqrt{5}}{2}$

해설

$x - y - 3 + k(x + y) = 0$ 에서
 $(k + 1)x + (k - 1)y - 3 = 0$

원점에서 이 직선까지의 거리

$$f(k) = \frac{|-3|}{\sqrt{(k+1)^2 + (k-1)^2}}$$
$$= \frac{3}{\sqrt{2(k^2 + 1)}}$$

따라서 $f(k)$ 는 분모가 최소일 때

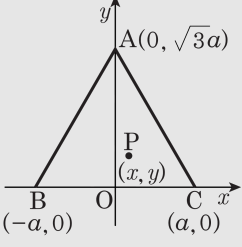
최대가 되므로 $f(k)$ 의 최댓값은

$$k = 0 \text{ 일 때 } \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

6. 좌표평면 위의 정삼각형 ABC에 대하여 $2\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$ 을 만족시키는 점 P의 자취는 어떤 도형을 그리는가?
- ① 삼각형 ② 직선 ③ 선분
 ④ 원 ⑤ 원 아닌 곡선

해설

그림과 같이 변 BC의 중점을 원점으로 하는 좌표축을 설정하고 점 C의 좌표를 $C(a, 0)$ 이라고 두면, $B(-a, 0)$, $A(0, \sqrt{3}a)$ 이다.



이 때, 점 P의 좌표를 $P(x, y)$ 라 하면

$$2\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 \text{ 이므로}$$

$$2\{x^2 + 2(y - \sqrt{3}a)^2\}$$

$$= (x + a)^2 + y^2 + (x - a)^2 + y^2$$

$$\text{정리하여 간단히 하면, } y = \frac{\sqrt{3}}{3}a$$

∴ 직선

7. 두 점 A(-3, 4), B(1, -2) 를 지름의 양끝으로 하는 원의 방정식을 구하면?

① $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 13$ ② $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 13$

③ $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 10$ ④ $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 10$

⑤ $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 9$

해설

A(-3, 4), B(1, -2)가 지름의 양 끝점이므로
 $\overline{AB}$ 의 중점이 원의 중심 O(-1, 1) 이고,

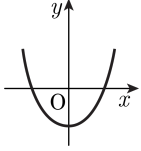
$$\frac{1}{2}\overline{AB} = \overline{OA} = \overline{OB} = r$$

$$\begin{aligned}\text{반지름 } r = \overline{OA} &= \sqrt{(-3+1)^2 + (4-1)^2} \\ &= \sqrt{4+9} = \sqrt{13}\end{aligned}$$

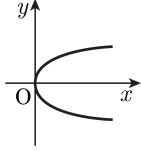
$$\therefore \text{원의 방정식은 } (x+1)^2 + (y-1)^2 = 13$$

8. 다음 중에서 함수의 그래프가 아닌 것을 모두 고르면?

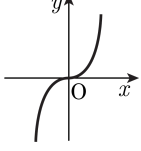
①



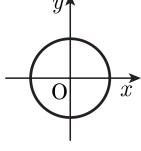
②



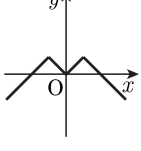
③



④



⑤



해설

②, ④의 그래프는 하나의 x 의 값에 대응되는 y 가 2개 이상이므로 함수의 그래프가 아니다. (x 축에 수선을 그어서 한 점에서 만나면 X 에서 Y 로의 함수)

9. 직선 $2x + y + 3 = 0$ 은 직선 $ax + by - 5 = 0$ 과는 평행하고, 직선 $2x + ay + b = 0$ 과는 수직이라 한다. 이 때, $a + b$ 의 값은?

① -6 ② -8 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$$ax + by - 5 = 0 \Rightarrow y = -\frac{a}{b}x + \frac{5}{b} \cdots \textcircled{A}$$

$$2x + ay + b = 0 \Rightarrow y = -\frac{2}{a}x - \frac{b}{a} \cdots \textcircled{B}$$

① 은 $y = -2x - 3$ 에 평행하므로, $\frac{a}{b} = 2$

② 는 $y = -2x - 3$ 에 수직하므로,

$$-2 \times \left(-\frac{2}{a}\right) = -1 \Rightarrow a = -4$$

$$\therefore a = -4 \quad b = -2 \quad \therefore a + b = -6$$

10. 두 원 $x^2 + (y-3)^2 = 4$, $(x-4)^2 + y^2 = n^2$ 이 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 자연수 n 의 개수는?

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

두 원이 서로 다른 두 점에서 만나려면 중심 사이
거리가 반지름의 합보다는 작고 반지름의
차보다는 커야 한다.

$$\Rightarrow |n-2| < \sqrt{3^2+4^2} < n+2$$

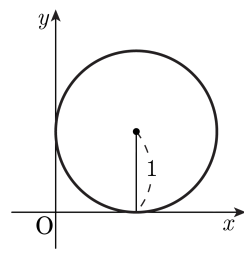
$$\Rightarrow -5 < n-2 < 5, \quad 5 < n+2$$

$$\Rightarrow -3 < n < 7, \quad 3 < n$$

$$\therefore 3 < n < 7$$

$$\therefore \text{자연수 } n = 4, 5, 6 \quad 3\text{개}$$

11. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원이 x 축, y 축에 동시에 접하고 있다. 이 원 위의 점 (x, y) 에 대하여 $\frac{y+2}{x+1}$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$\frac{y+2}{x+1} = k$ 라 하면 직선 $y+2 = k(x+1)$ 은

k 값에 관계없이 점 $(-1, -2)$ 를 지난다.

이 때, 기울기 k 는 직선이 원에 접할 때 최댓값과 최솟값을 갖는다.

$$\frac{|k-1+k-2|}{\sqrt{k^2+1}} = 1$$

$$|2k-3| = \sqrt{k^2+1}$$

$$4k^2 - 12k + 9 = k^2 + 1$$

$$3k^2 - 12k + 8 = 0$$

최댓값과 최솟값은 이 방정식의 해이므로
근과 계수와의 관계에 의해 합은 4이다.

12. 두 집합 $X = \{x \mid x \text{는 } 100 \text{ 이하의 자연수}\}$, $Y = \{y \mid y \text{는 자연수}\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 f 를 $f(x) = (x \text{의 양의 약수의 개수})$ 로 정의할 때, $f(x) = (\text{홀수})$ 를 만족시키는 모든 x 의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▷ 정답 : 10 개

해설

100 이하의 자연수 중에서 약수의 개수가
홀수인 수는 완전제곱수밖에 없다.
즉, $1^2, 2^2, 3^2, \dots, 10^2$ 이다.
따라서 x 의 개수는 10개

13. 두 함수 $f(x) = x + 3$, $g(x) = 2x - 1$ 이고 $(f \circ h)(x) = g(x)$ 일 때, $h(1)$ 의 값은 얼마인가?

① -2 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

해설

$(f \circ h)(x) = g(x)$ 에 $x = 1$ 을 대입하면 $f(h(1)) = g(1)$

한편, $g(1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1$ 이므로 $h(1) = k$ 라 하면

$f(k) = 1$ 에서 $f(k) = k + 3 = 1$ 이므로 $k = -2$

$\therefore h(1) = -2$

14. 직선 $y = 2x$ 를 x 축의 방향으로 m 만큼 평행이동시켰더니 두 원 $x^2 + y^2 = 9$, $x^2 + y^2 + 4x - ky + 1 = 0$ 의 공통현을 품는 직선이 되었다. 이 때, $m + k$ 의 값은 ?

- ① 2 ② -2 ③ $\frac{1}{2}$ ④ $-\frac{1}{2}$ ⑤ 0

해설

직선 $y = 2x$ 를 x 축의 방향으로 m 만큼 평행이동하면 $y = 2x - 2m$
두 원의 공통현을 품는 직선을 구하면

$$x^2 + y^2 + 4x - ky + 1 - (x^2 + y^2 - 9) = 0$$

$$4x - ky + 10 = 0 \cdots \textcircled{1}$$

그런데 ①과 $2x - y - 2m = 0$ 은 일치해야 하므로

$$\frac{4}{2} = \frac{-k}{-1} = \frac{10}{-2m}$$

$$\therefore k = 2, m = -\frac{5}{2}$$

$$\therefore m + k = -\frac{1}{2}$$

15. 원 $x^2 + y^2 - 2x - 6y = 0$ 을 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 도형에 의하여 x 축이 잘렸을 때, 잘린 선분의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

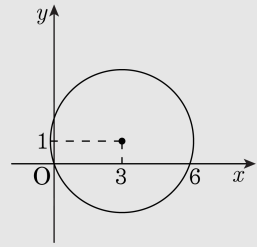
해설

원 $x^2 + y^2 - 2x - 6y = 0$ 을 표준형으로 고치면,

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 = 10,$$

이 원을 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동하면,

$$(x-3)^2 + (y-1)^2 = 10 \cdots \textcircled{1}$$



①의 그래프는 다음 그림과 같으므로

$y = 0$ 일 때의 x 의 값을 구하면

$$(x-3)^2 + (0-1)^2 = 10 \text{ 에서}$$

$$x^2 - 6x = 0, x(x-6) = 0$$

$$\therefore x = 0 \text{ 또는 } x = 6$$

따라서 잘린 선분의 길이는 6 이다.