

1. 이차함수  $y = \frac{1}{3}x^2 - 6x + k$ 의 최솟값과 이차함수  $y = -3x^2 + 6x - 3k + 3$ 의 최댓값이 일치할 때,  $k$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답:  $\frac{33}{4}$

해설

$$y = \frac{1}{3}x^2 - 6x + k = \frac{1}{3}(x-9)^2 - 27 + k$$

최솟값은  $-27 + k$

$$y = -3x^2 + 6x - 3k + 3$$

$$= -3(x-1)^2 + 6 - 3k$$

최댓값은  $6 - 3k$

$$-27 + k = 6 - 3k$$

$$\therefore k = \frac{33}{4}$$

2. 이차함수  $y = -x^2 + 10x - 13$  의 최댓값을  $m$ , 이차함수  $y = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$  의 최솟값을  $n$  이라고 할 때,  $mn$  의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$$y = -x^2 + 10x - 13 = -(x-5)^2 + 12$$

$$\text{최댓값 } m = 12$$

$$y = \frac{1}{2}x^2 + x + 1 = \frac{1}{2}(x+1)^2 + \frac{1}{2}$$

$$\text{최솟값 } n = \frac{1}{2}$$

$$\therefore mn = 12 \times \frac{1}{2} = 6$$

3.  $-2 \leq x \leq 3$ 에서  $y = x^2 - 2x - 2$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

- ① 3      ② 7      ③ -2      ④ 0      ⑤ 1

해설

$y = (x - 1)^2 - 3$ 이고 꼭짓점의  $x$ 좌표가 주어진  $x$ 의 범위에 포함되므로

$x = 1$ 에서 최솟값을  $x = -2$ 에서 최댓값을 갖는다.

$$(\text{최댓값}) = (-2)^2 - 2(-2) - 2 = 6$$

$$(\text{최솟값}) = -3$$

4. 다음 이차함수 중 최솟값을 갖는 것은?

①  $y = -2x^2 + 1$

②  $y = -x^2 + x + 1$

③  $y = -(x-1)^2 + 4$

④  $y = 1 - x^2$

⑤  $y = (x-1)(x+2)$

해설

그래프가 아래로 볼록해야 최솟값을 가진다.

5. 합이 18 인 두 수가 있다. 한 수를  $x$ , 두 수의 곱을  $y$  라 할 때, 두 수의 곱의 최댓값을 구하면?

① 11      ② 21      ③ 25      ④ 81      ⑤ 100

**해설**

합이 18 인 두 수가 있다. 한 수를  $x$  로 두면 나머지 한 수는  $(18 - x)$  이다.

$$y = x(18 - x) = -x^2 + 18x = -(x^2 - 18x + 81) + 81$$

$$y = -(x - 9)^2 + 81$$

따라서 두 수의 곱의 최댓값은 81 이다.

6.  $2x + y = 3$  일 때,  $x^2 + xy + 1$  의 최댓값을 구하면?

- ①  $\frac{11}{4}$       ② 3      ③  $\frac{13}{4}$       ④  $\frac{7}{2}$       ⑤  $\frac{15}{4}$

해설

$2x + y = 3$  에서  $y = -2x + 3$  이다.

$$x^2 + xy + 1 = x^2 + x(-2x + 3) + 1$$

$$= -x^2 + 3x + 1$$

$$= -\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{13}{4}$$

따라서 최댓값은  $\frac{13}{4}$  이다.

7. 이차함수  $y = x^2 - 2ax - 2a - 5$  의 최솟값을  $m$  이라고 할 때,  $m$  의 최댓값을 구하면?

- ① -1      ② -2      ③ -3      ④ -4      ⑤ -5

해설

$$y = x^2 - 2ax - 2a - 5 \\ = (x - a)^2 - a^2 - 2a - 5$$

$$y \text{ 의 최솟값 : } m = -a^2 - 2a - 5 \\ = -(a + 1)^2 - 4$$

$$m \text{ 의 최댓값 : } -4$$

8. 이차함수  $f(x) = x^2 + 2x + a$  에 대하여  $f(x)$  의 최솟값과  $f(f(x))$  의 최솟값이 같게 되도록 하는 실수  $a$  의 값의 범위는?

- ①  $a \leq 0$     ②  $a \geq 0$     ③  $a \leq 1$     ④  $a \geq 1$     ⑤  $a \leq 2$

해설

$$f(x) = x^2 + 2x + a = (x+1)^2 + a - 1 \text{ 은}$$

$x = -1$  일 때 최솟값  $a - 1$  을 갖는다.

$$\therefore f(x) \geq a - 1$$

$$f(x) = t \text{ 라면}$$

$$f(f(x)) = f(t) = t^2 + 2t + a (t \geq a - 1)$$

이때, 꼭짓점의  $t$  좌표  $-1$  이

$t \geq a - 1$  에 포함되면

$f(t)$  의 최솟값이  $f(-1) = a - 1$  이 되어 최솟값과 같아진다.

$$\text{즉, } -1 \geq a - 1 \quad \therefore a \leq 0$$



9.  $x, y, z$ 가 실수일 때, 다음 식의 최댓값을 구하여라.

$$4x - x^2 - y^2 - z^2 + 5$$

▶ 답:

▷ 정답: 9

해설

$$\begin{aligned} & 4x - x^2 - y^2 - z^2 + 5 \\ &= -(x^2 - 4x) - y^2 - z^2 + 5 \\ &= -(x-2)^2 - y^2 - z^2 + 9 \end{aligned}$$

$x, y, z$ 는 실수이므로  
 $(x-2)^2 \geq 0, y^2 \geq 0, z^2 \geq 0$   
따라서  $4x - x^2 - y^2 - z^2 + 5$ 는  
 $x-2=0, y=0, z=0$ 일 때,  
최댓값 9를 갖는다.

10.  $x$ 가 실수일 때  $\frac{x^2-x+4}{x^2+x+1}$ 의 값이 취할 수 있는 정수의 개수는?

- ① 2 개    ② 3 개    ③ 4 개    ④ 5 개    ⑤ 6 개

해설

$$\frac{x^2-x+4}{x^2+x+1} = k \text{라 두면}$$

$$x^2-x+4 = k(x^2+x+1)$$

$$(k-1)x^2 + (k+1)x + k-4 = 0$$

$x$ 가 실수이므로 실근이다.

$$\text{따라서, 판별식 } D = (k+1)^2 - 4(k-1)(k-4) \geq 0$$

$$3k^2 - 22k + 15 \leq 0$$

$$\therefore \frac{11-2\sqrt{19}}{3} \leq k \leq \frac{11+2\sqrt{19}}{3}$$

$k$ 는 정수이므로 대강의 범위를 구해보면

$$0. \times \times \leq k \leq 6. \times \times \text{에서}$$

$k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ 의 6개이다.

11. 밑변의 길이와 높이의 합이 36 cm인 삼각형의 최대 넓이를 구하여라.

▶ 답: cm<sup>2</sup>

▷ 정답: 162cm<sup>2</sup>

해설

삼각형의 밑변의 길이를  $x$  cm, 높이를  $y$  cm<sup>2</sup>라 하자.

$$\begin{aligned}y &= \frac{1}{2}x(36 - x) \\ &= -\frac{1}{2}(x^2 - 36x) \\ &= -\frac{1}{2}(x - 18)^2 + 162\end{aligned}$$

따라서 삼각형의 최대 넓이는 162 cm<sup>2</sup>

12. 둘레의 길이가 24 인 철사를 구부러서 부채꼴 모양을 만들려고 한다. 부채꼴의 넓이를  $y$  라고 할 때, 부채꼴의 넓이의 최댓값을 구하면?

- ① 18      ② 20      ③ 30      ④ 32      ⑤ 36

해설

반지름의 길이를  $x$  라 하면 호의 길이는  $24 - 2x$  이다.

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2} \times x \times (24 - 2x) \\ &= x(12 - x) \\ &= -x^2 + 12x \\ &= -(x^2 - 12x + 36 - 36) \\ &= -(x - 6)^2 + 36 \end{aligned}$$

이차함수는 위로 볼록이므로 꼭짓점이 최댓값을 나타낸다. 따라서 꼭짓점이  $(6, 36)$  이므로 반지름의 길이  $x = 6$  일 때, 부채꼴의 넓이  $y$  가 최댓값 36 을 가진다.

13. 어떤 축구 선수가 축구공을 찼을 때,  $x$  초 후의 축구공의 높이를  $y$ m 라고 하면  $y = -x^2 + 6x$  의 관계가 성립한다. 축구공이 가장 높이 올라갔을 때의 높이를 구하여라.

▶ 답:  $\underline{\quad\quad\quad}$  m

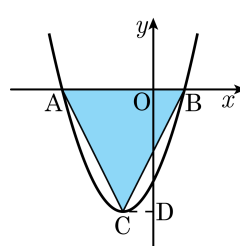
▷ 정답: 9m

해설

$y = -x^2 + 6x$  에서  $y = -(x-3)^2 + 9$  이다.  
따라서 가장 높이 올라갔을 때의 높이는 9m 이다.

14. 다음 그림과 같이  $y = x^2 + 2x - 3$  의 그래프가  $x$ 축과 만나는 두 점을 A, B, 꼭짓점을 C 라 할 때,  $\triangle ABC$  의 넓이는?

- ① 6                      ② 7                      ③ 8  
④ 9                      ⑤ 10



해설

$$y = x^2 + 2x - 3 = (x + 1)^2 - 4$$

꼭짓점  $C(-1, -4)$

$y = 0$  일 때  $x^2 + 2x - 3 = (x + 3)(x - 1) = 0$  이므로

$A(-3, 0)$ ,  $B(1, 0)$

$$\therefore \triangle ABC = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8$$