

1. 이차함수 $y = \frac{1}{3}x^2 - 6x + k$ 의 최솟값과 이차함수 $y = -3x^2 + 6x - 3k + 3$ 의 최댓값이 일치할 때, k 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▶ 정답: $\frac{33}{4}$

해설

$$y = \frac{1}{3}x^2 - 6x + k = \frac{1}{3}(x-9)^2 - 27 + k$$

최솟값은 $-27 + k$

$$\begin{aligned}y &= -3x^2 + 6x - 3k + 3 \\ &= -3(x-1)^2 + 6 - 3k\end{aligned}$$

최댓값은 $6 - 3k$

$$-27 + k = 6 - 3k$$

$$\therefore k = \frac{33}{4}$$

2. 이차함수 $y = -x^2 + 10x - 13$ 의 최댓값을 m , 이차함수 $y = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$ 의 최솟값을 n 이라고 할 때, mn 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$$y = -x^2 + 10x - 13 = -(x - 5)^2 + 12$$

최댓값 $m = 12$

$$y = \frac{1}{2}x^2 + x + 1 = \frac{1}{2}(x + 1)^2 + \frac{1}{2}$$

최솟값 $n = \frac{1}{2}$

$$\therefore mn = 12 \times \frac{1}{2} = 6$$

3. $-2 \leq x \leq 3$ 에서 $y = x^2 - 2x - 2$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

① 3

② 7

③ -2

④ 0

⑤ 1

해설

$y = (x - 1)^2 - 3$ 이고 꼭짓점의 x 좌표가 주어진 x 의 범위에 포함되므로

$x = 1$ 에서 최솟값을 $x = -2$ 에서 최댓값을 갖는다.

$$(\text{최댓값}) = (-2)^2 - 2(-2) - 2 = 6$$

$$(\text{최솟값}) = -3$$

4. 다음 이차함수 중 최솟값을 갖는 것은?

① $y = -2x^2 + 1$

② $y = -x^2 + x + 1$

③ $y = -(x - 1)^2 + 4$

④ $y = 1 - x^2$

⑤ $y = (x - 1)(x + 2)$

해설

그래프가 아래로 볼록해야 최솟값을 가진다.

5. 합이 18 인 두 수가 있다. 한 수를 x , 두 수의 곱을 y 라 할 때, 두 수의 곱의 최댓값을 구하면?

① 11

② 21

③ 25

④ 81

⑤ 100

해설

합이 18 인 두 수가 있다. 한 수를 x 로 두면 나머지 한 수는 $(18 - x)$ 이다.

$$y = x(18 - x) = -x^2 + 18x = -(x^2 - 18x + 81) + 81$$

$$y = -(x - 9)^2 + 81$$

따라서 두 수의 곱의 최댓값은 81 이다.

6. $2x + y = 3$ 일 때, $x^2 + xy + 1$ 의 최댓값을 구하면?

① $\frac{11}{4}$

② 3

③ $\frac{13}{4}$

④ $\frac{7}{2}$

⑤ $\frac{15}{4}$

해설

$2x + y = 3$ 에서 $y = -2x + 3$ 이다.

$$\begin{aligned}x^2 + xy + 1 &= x^2 + x(-2x + 3) + 1 \\ &= -x^2 + 3x + 1 \\ &= -\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{13}{4}\end{aligned}$$

따라서 최댓값은 $\frac{13}{4}$ 이다.

7. 이차함수 $y = x^2 - 2ax - 2a - 5$ 의 최솟값을 m 이라고 할 때, m 의 최댓값을 구하면?

① -1

② -2

③ -3

④ -4

⑤ -5

해설

$$\begin{aligned}y &= x^2 - 2ax - 2a - 5 \\ &= (x - a)^2 - a^2 - 2a - 5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y \text{ 의 최솟값 : } m &= -a^2 - 2a - 5 \\ &= -(a + 1)^2 - 4\end{aligned}$$

m 의 최댓값 : -4

8. 이차함수 $f(x) = x^2 + 2x + a$ 에 대하여 $f(x)$ 의 최솟값과 $f(f(x))$ 의 최솟값이 같게 되도록 하는 실수 a 의 값의 범위는?

- ① $a \leq 0$ ② $a \geq 0$ ③ $a \leq 1$ ④ $a \geq 1$ ⑤ $a \leq 2$

해설

$$f(x) = x^2 + 2x + a = (x + 1)^2 + a - 1 \text{ 은}$$

$x = -1$ 일 때 최솟값 $a - 1$ 을 갖는다.

$$\therefore f(x) \geq a - 1$$

$$f(x) = t \text{ 라면}$$

$$f(f(x)) = f(t) = t^2 + 2t + a (t \geq a - 1)$$

이때, 꼭짓점의 t 좌표 -1 이

$t \geq a - 1$ 에 포함되면

$f(t)$ 의 최솟값이 $f(-1) = a - 1$ 이 되어 최솟값과 같아진다.

$$\text{즉, } -1 \geq a - 1 \quad \therefore a \leq 0$$

9. x, y, z 가 실수일 때, 다음 식의 최댓값을 구하여라.

$$4x - x^2 - y^2 - z^2 + 5$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$$\begin{aligned} & 4x - x^2 - y^2 - z^2 + 5 \\ &= -(x^2 - 4x) - y^2 - z^2 + 5 \\ &= -(x - 2)^2 - y^2 - z^2 + 9 \end{aligned}$$

x, y, z 는 실수이므로

$$(x - 2)^2 \geq 0, y^2 \geq 0, z^2 \geq 0$$

따라서 $4x - x^2 - y^2 - z^2 + 5$ 는

$x - 2 = 0, y = 0, z = 0$ 일 때,

최댓값 9를 갖는다.

10. x 가 실수일 때 $\frac{x^2 - x + 4}{x^2 + x + 1}$ 의 값이 취할 수 있는 정수의 개수는?

① 2 개

② 3 개

③ 4 개

④ 5 개

⑤ 6 개

해설

$$\frac{x^2 - x + 4}{x^2 + x + 1} = k \text{라 두면}$$

$$x^2 - x + 4 = k(x^2 + x + 1)$$

$$(k - 1)x^2 + (k + 1)x + k - 4 = 0$$

x 가 실수이므로 실근이다.

따라서, 판별식 $D = (k + 1)^2 - 4(k - 1)(k - 4) \geq 0$

$$3k^2 - 22k + 15 \leq 0$$

$$\therefore \frac{11 - 2\sqrt{19}}{3} \leq k \leq \frac{11 + 2\sqrt{19}}{3}$$

k 는 정수이므로 대강의 범위를 구해보면

$0. \times \times \leq k \leq 6. \times \times$ 에서

$k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ 의 6개이다.

11. 밑변의 길이와 높이의 합이 36 cm 인 삼각형의 최대 넓이를 구하여라.

▶ 답: cm²

▷ 정답: 162 cm²

해설

삼각형의 밑변의 길이를 x cm, 높이를 y cm² 라 하자.

$$\begin{aligned}y &= \frac{1}{2}x(36 - x) \\ &= -\frac{1}{2}(x^2 - 36x) \\ &= -\frac{1}{2}(x - 18)^2 + 162\end{aligned}$$

따라서 삼각형의 최대 넓이는 162 cm²

12. 둘레의 길이가 24 인 철사를 구부려서 부채꼴 모양을 만들려고 한다. 부채꼴의 넓이를 y 라고 할 때, 부채꼴의 넓이의 최댓값을 구하면?

① 18

② 20

③ 30

④ 32

⑤ 36

해설

반지름의 길이를 x 라 하면 호의 길이는 $24 - 2x$ 이다.

$$\begin{aligned}y &= \frac{1}{2} \times x \times (24 - 2x) \\ &= x(12 - x) \\ &= -x^2 + 12x \\ &= -(x^2 - 12x + 36 - 36) \\ &= -(x - 6)^2 + 36\end{aligned}$$

이차함수는 위로 볼록이므로 꼭짓점이 최댓값을 나타낸다.

따라서 꼭짓점이 $(6, 36)$ 이므로 반지름의 길이 $x = 6$ 일 때, 부채꼴의 넓이 y 가 최댓값 36 을 가진다.

13. 어떤 축구 선수가 축구공을 찼을 때, x 초 후의 축구공의 높이를 y m 라고 하면 $y = -x^2 + 6x$ 의 관계가 성립한다. 축구공이 가장 높이 올라갔을 때의 높이를 구하여라.

▶ 답: m

▷ 정답: 9m

해설

$y = -x^2 + 6x$ 에서 $y = -(x - 3)^2 + 9$ 이다.

따라서 가장 높이 올라갔을 때의 높이는 $9m$ 이다.

14. 다음 그림과 같이 $y = x^2 + 2x - 3$ 의 그래프가 x 축과 만나는 두 점을 A, B, 꼭짓점을 C 라 할 때, $\triangle ABC$ 의 넓이는?

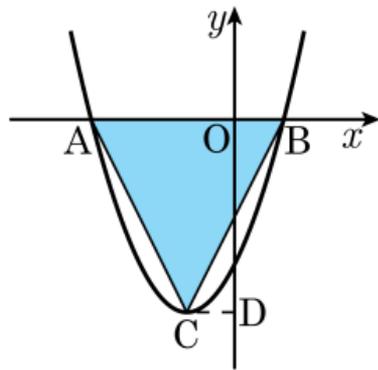
① 6

② 7

③ 8

④ 9

⑤ 10



해설

$$y = x^2 + 2x - 3 = (x + 1)^2 - 4$$

꼭짓점 $C(-1, -4)$

$y = 0$ 일 때 $x^2 + 2x - 3 = (x + 3)(x - 1) = 0$ 이므로

$A(-3, 0)$, $B(1, 0)$

$$\therefore \triangle ABC = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8$$