

1. 두 집합 A, B 에 대하여 다음 중 옳지 않은 것은?

① $A \cap \emptyset = \emptyset$

② $\emptyset \cup A = A$

③ $A \subset (A \cap B)$

④ $B \subset (A \cup B)$

⑤ $(A \cap B) \subset (A \cup B)$

해설

$(A \cap B) \subset A, (A \cap B) \subset B$
 $A \subset (A \cup B), B \subset (A \cup B)$

2. 다음 두 조건을 만족하는 두 집합 A, B 는?

$A \cap B = A, \quad A \cup B = B$

- ① $A = \{1, 2, 3, 5\}, B = \{3, 5\}$
- ② $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}, B = \{2, 4, 8\}$
- ③ $A = \{x \mid x \text{는 } 6 \text{의 약수}\}, B = \{x \mid x \text{는 } 12 \text{의 약수}\}$
- ④ $A = \{x \mid x \text{는 } 12 \text{의 약수}\}, B = \{x \mid x \text{는 } 9 \text{의 약수}\}$
- ⑤ $A = \{\text{대, 한, 민, 국}\}, B = \{\text{한, 국}\}$

해설

주어진 조건을 만족하려면 두 집합 A, B 는 $A \subset B$ 의 관계이어야 한다.

- ① $B \subset A$
- ② $B \subset A$
- ③ $A = \{1, 2, 3, 6\}, B = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ 이므로 $A \subset B$
- ④ $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}, B = \{1, 3, 9\}$ 이므로 $A \not\subset B, B \not\subset A$
- ⑤ $B \subset A$

3. 전체집합 U 의 세 부분집합 A, B, C 에 대하여 다음 중 등식이 성립하지 않는 것은?

① $(A - B) - C = A - (B \cup C)$

② $(A - B)^c - B = (A \cap B)^c$

③ $(A \cap B) - C = A \cap (B - C)$

④ $A \cap (A \cup B)^c = \phi$

⑤ $(B - C) \cap (B - A) = B \cap (A \cup C)^c$

해설

② $(A - B)^c - B = (A \cap B^c)^c \cap B^c = (A^c \cup B) \cap B^c = (A^c \cap B^c) \cup (B \cap B^c)$
 $= (A^c \cap B^c) = (A \cup B)^c$

4. $a, b, c \in R$ 일 때, 조건 $a = b = c$ 의 부정을 바르게 말한 것은?

- ① a, b, c 는 모두 다르다.
- ② a, b, c 는 모두 다르지 않다.
- ③ a, b, c 중에는 같은 수가 있다.
- ④ a, b, c 중에는 0이 아닌 수가 있다.
- ⑤ a, b, c 중에는 다른 두 수가 있다.

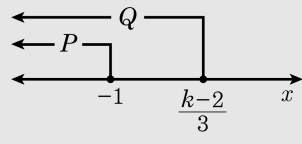
해설

① : $a = b = c \Rightarrow a = b$ 이고, $b = c$ 이고, $c = a$ 이다.
부정 : $a \neq b$ 또는 $b \neq c$ 또는 $c \neq a \Rightarrow a, b, c$ 중에는 다른 두 수가 있다.

5. 명제 ‘ $x \leq -1$ 이면 $3x + 2 \leq k$ 이다.’ 가 참일 때, 다음 중 상수 k 의 값으로 옳은 것은?

① -5 ② -4 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1

해설



$p : x \leq -1$, $q : 3x + 2 \leq k$ 라 하고, 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 할 때 명제 $p \rightarrow q$ 가 참이므로 $P \subset Q$ 이다.

$$-1 \leq \frac{k-2}{3}, \quad -3 \leq k-2$$

$$\therefore k \geq -1$$

6. 다음 명제 중에서 역이 참인 명제는?

- ① x, y 가 유리수이면 $x + y$ 도 유리수이다.
- ② $x = y$ 이면 $xm = ym$ 이다.
- ③ 실수 x, y 에 대하여 $x^2 + y^2 > 0$ 이면 $x \neq 0$ 또는 $y \neq 0$ 이다.
- ④ $x = 2$ 이면 $x^2 = 4$ 이다.
- ⑤ 6의 배수는 3의 배수이다.

해설

- ① $x + y$ 가 유리수 $\rightarrow x, y$ 가 유리수 (거짓)
반례) $x = 1 + \sqrt{2}, y = 1 - \sqrt{2}$ 라 하면 $x + y = 2$ (유리수)
- ② $xm = ym \rightarrow x = y$ (거짓)
반례) $x = 1, y = 2, m = 0, xm = ym = 0$
- ③ $x \neq 0$ 또는 $y \neq 0 \rightarrow x^2 + y^2 > 0$ (참)
- ④ $x^2 = 4 \rightarrow x = 2$ (거짓)
 $x^2 = 4$ 이면 $x = \pm 2$ 이다.
- ⑤ 3의 배수 $\rightarrow$ 6의 배수 (거짓)
반례) 9는 3의 배수이지만 6의 배수는 아니다.

7. 두 명제 $p \rightarrow q$ 와 $r \rightarrow \sim q$ 가 모두 참일 때, 보기에서 반드시 참인 것을 모두 고르면?

$\neg p \rightarrow r$	$\neg r \rightarrow p$	$\neg p \rightarrow \sim r$
$\neg q \rightarrow \sim r$	$\neg r \rightarrow \sim p$	

- ① $\neg$, $\neg$
- ② $\neg$, $\neg$, $\neg$
- ③ $\neg$, $\neg$
- ④ $\neg$, $\neg$, $\neg$
- ⑤ $\neg$, $\neg$, $\neg$

해설

$p \rightarrow q$ 가 참이고, 또한 $r \rightarrow \sim q$ 가 참이므로 그 대우명제인 $q \rightarrow \sim r$ 가 참. $\therefore p \rightarrow q \rightarrow \sim r$
즉, $p \rightarrow \sim r, q \rightarrow \sim r$ 가 참이고 또한 $p \rightarrow \sim r$ 이 참이므로 그 대우인 $r \rightarrow \sim p$ 도 참이다.
따라서 $\neg$, $\neg$, $\neg$ 이 참이다.

8. 다음 [보기] 중 p 가 q 이기 위한 필요조건이고 충분조건이 아닌 것은?

보기

- ㉠ $p : x^2 + y^2 = 0, q : xy = 0$
- ㉡ $p : x^2 = 16, q : x = 4$
- ㉢ $p : x, y$ 는 유리수, $q : x + y, xy$ 는 유리수

- ① ㉠ ② ㉡ ③ ㉡, ㉢
④ ㉠, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $x^2 + y^2 = 0 \rightarrow x = 0$ 그리고 $y = 0$
 $xy = 0 \rightarrow x = 0$ 또는 $y = 0$
 $P \subset Q$ 이므로 p 는 q 이기 위한 ‘충분조건’
㉡ $x^2 = 16 \rightarrow x = \pm 4$
 $Q \subset P$ 이므로 p 는 q 이기 위한 ‘필요조건’
㉢ x, y 는 유리수 $\rightarrow x + y, xy$ 는 유리수,
 p 는 q 이기 위한 ‘충분조건’
반례 : $x = 1 + \sqrt{2}, y = 1 - \sqrt{2}$
 $\rightarrow x + y = 2, xy = -1$

9. 다음에서 조건 p 가 q 이기 위한 필요충분조건인 것은?

- ① $p : x = 0$ 이고 $y = 0, q : xy = 0$
- ② $p : x^2 = 9, q : x = 3$
- ③ $p : x, y$ 는 모두 짝수, $q : x + y$ 는 짝수
- ④ $p : x \neq 0$ 이고 $y \neq 0, q : xy \neq 0$
- ⑤ $p : x$ 는 유리수, $q : x^2$ 은 유리수

해설

- ① $q \rightarrow p$: 거짓 ($x = 0, y = 1$)
- ② $p \rightarrow q$: 거짓 ($x^2 = 9$ 이면 $x = \pm 3$)
- ③ $q \rightarrow p$: 거짓 ($x = 1, y = 3$ 이면 $x + y = 4$)
- ④ 필요충분조건
- ⑤ $q \rightarrow p$: 거짓 ($x = \sqrt{2}$ 이면 $x^2 = 2$)

10. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $\{(A - B) \cup (A \cap B)\} \cap B = A$ 가 성립하기 위한 필요충분조건은?

① $A \cap B = B$

② $A \cap B^c = B$

③ $A \cup B = U$

④ $A - B = \emptyset$

⑤ $B - A = U$

해설

$$\begin{aligned} & \{(A \cap B) \cup (A - B)\} \cap B \\ &= \{(A \cap B) \cup (A \cap B^c)\} \cap B \\ &= \{A \cap (B \cup B^c)\} \cap B = A \cap B = A \\ & A \subset B \text{ 이므로 } A \cap B^c = \emptyset \text{ 이면} \\ & A \subset B \text{ 이므로 필요충분조건은 ④이다.} \end{aligned}$$

11. 다음은 $|a| < 1$, $|b| < 1$, $|c| < 1$ 일 때 부등식 $abc + 2 > a + b + c$ 가 성립함을 증명한 것이다. ㉠, ㉡, ㉢에 알맞은 것을 차례로 나열한 것은?

$$\begin{aligned} abc + 2 &> a + b + c \\ &= abc + 1 + 1 - a - b - c \\ &= (1 - ab)(1 - c) + (\text{㉠}) \end{aligned}$$

$|a| < 1$ 이므로 $(\text{㉡}) < 1 - a < (\text{㉢})$

같은 방법으로 $(\text{㉢}) < 1 - b < (\text{㉢})$,

$$(\text{㉡}) < 1 - c < (\text{㉢})$$

또한 $|ab| < 1$ 이므로 $(\text{㉡}) < 1 - ab < (\text{㉢})$

따라서 $abc + 2 - (a + b + c) = (1 - ab)(1 - c) + (\text{㉠}) > (\text{㉡})$

이므로 $abc + 2 > a + b + c$

① $(1 + a)(1 + b), 0, 2$

② $(1 - a)(1 + b), 0, 2$

③ $(1 + a)(1 + b), -1, 1$

④ $(1 - a)(1 - b), 0, 2$

⑤ $(1 - a)(1 - b), -1, 1$

해설

$$\begin{aligned} abc + 2 > a + b + c &= abc + 1 + 1 - a - b - c \\ &= abc - ab - c + 1 + 1 + ab - a - b \\ &= (1 - ab)(1 - c) + (1 - a)(1 - b) \end{aligned}$$

$|a| < 1$ 이므로 $-1 < a < 1$ 이므로 $0 < 1 - a < 2$

$|b| < 1$ 이므로 $-1 < b < 1$ 이므로 $0 < 1 - b < 2$

$|c| < 1$ 이므로 $-1 < c < 1$ 이므로 $0 < 1 - c < 2$

또한 $|ab| < 1$ 이므로 $0 < 1 - ab < 2$

따라서 $abc + 2 - (a + b + c)$

$$= (1 - ab)(1 - c) + (1 - a)(1 - b) > 0$$

이므로 $abc + 2 > a + b + c$

12. 부등식 $n^{20} < 3^{30}$ 을 만족시키는 자연수 n 의 최댓값은?

① 4

② 5

③ 6

④ 7

⑤ 8

해설

$$\frac{n^{20}}{3^{30}} = \frac{(n^2)^{10}}{(3^3)^{10}} = \left(\frac{n^2}{27}\right)^{10} < 1$$

$$\frac{n^2}{27} < 1 \text{ 이므로 } n^2 < 27$$

따라서 자연수 n 의 최댓값은 5이다.

13. 실수 a, b 에 대하여 $a^2 + b^2 \geq -ab$ 임을 증명한 것이다. $[가]$, $[나]$ 에 들어갈 알맞은 부등호로 짝지어진 것은?

$$\begin{aligned} A &= a^2 + b^2, \quad B = -ab \\ A - B &= a^2 + b^2 - (-ab) \\ &= a^2 + b^2 + ab \\ &= a^2 + ab + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + b^2 \\ &= \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 \geq 0 \end{aligned}$$

따라서 $A - B \geq 0$ 이므로 $A \geq B$ 이다. 즉, $a^2 + b^2 \geq -ab$ (단 등호는 $a = b = c$ 일 때 성립)

- ① $>, \geq$
- ② $\geq, \geq$
- ③ $>, >$
- ④ $<, \geq$
- ⑤ $\leq, \leq$

해설

$$\begin{aligned} A &= a^2 + b^2, \quad B = -ab \\ A - B &= a^2 + b^2 - (-ab) \\ &= a^2 + b^2 + ab \\ &= a^2 + ab + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + b^2 \\ &= \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 \geq 0 \end{aligned}$$

(a, b 가 실수이므로)
 $\left(a + \frac{b}{2}\right)^2 \geq 0, \frac{3}{4}b^2 \geq 0$

따라서 $A - B \geq 0$ 이므로 $A \geq B$ 이다.
즉, $a^2 + b^2 \geq -ab$ (단 등호는 $a = b = c$ 일 때 성립)

14. 길이가 16m인 철조망을 이용하여 마당에 직사각형 모양의 토끼장을 만들어 토끼를 기르려고 한다. 이 때, 토끼장의 넓이의 최대값은?

① 8 m^2 ② 16 m^2 ③ 25 m^2 ④ 36 m^2 ⑤ 64 m^2

해설

가로를 x , 세로를 y 라 하자.

$$2(x+y) = 16 \quad x+y = 8$$

산술기하평균을 사용하면,

$$x+y \geq 2\sqrt{xy}$$

$$4 \geq \sqrt{xy}$$

$$\Rightarrow 16 \geq xy$$

$\therefore$ 넓이의 최대값 : $16(\text{m}^2)$

15. 두 실수 x, y 의 제곱의 합이 10일 때, $x + 3y$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 한다. 이 때, $M - m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 20

해설

코시-슈바르츠 부등식에 의해
 $(1^2 + 3^2)(x^2 + y^2) \geq (x + 3y)^2$
 $x^2 + y^2 = 10$ 이므로 $100 \geq (x + 3y)^2$
 $\therefore -10 \leq x + 3y \leq 10$
 $\therefore M = 10, m = -10$
 $\therefore M - m = 10 - (-10) = 20$

16. 전체집합 $U = \{10, 20, 30, 40, 50, 60\}$ 의 두 부분집합 A, B 가 $A \cup B = U$, $A \cap B = \{30, 50\}$ 을 만족한다. 집합 A, B 의 원소의 합을 각각 $S(A), S(B)$ 라고 할 때, $S(A) + S(B)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 290

해설

$S(A) + S(B)$ 의 값을 구하는 것이므로
각 원소를 아무렇게 배열해도 원소의 합은 같다.
 $\therefore 10 + 20 + 30 + 40 + 50 + 60 + (30 + 50) = 290$

17. 두 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 40 \text{의 약수}\}$, $B = \{2, 4, 8, 10\}$ 에 대하여 $A * B = (A \cup B) - A$ 라고 할 때, $(A * B) * A$ 를 구하여라.

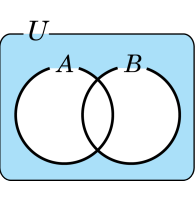
▶ 답 :

▷ 정답 : {1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40}

해설

$B \subset A$ 이므로 $A * B = \emptyset$
 $(A * B) * A = A$
 $\therefore A = \{1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40\}$

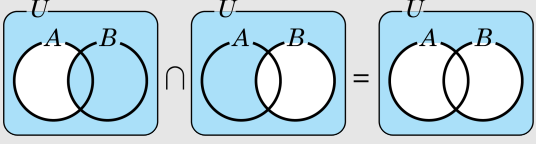
18. 다음 중 다음 벤 다이어그램의 색칠한 부분이 나타내는 집합을 모두 고르면?



- ① $(A \cap B)^c$
- ② $A^c \cap B^c$
- ③ $U - (A \cap B)$
- ④ $U - (A \cup B)$
- ⑤ $(A \cup B)^c$

해설

$A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$



19. 자연수 전체의 집합의 부분집합 $A = \{a|a \text{는 } 24 \text{의 약수}\}$, $B = \{b|b \text{는 } 36 \text{의 약수}\}$ 에 대하여 $(A \cup B) \cap (A^c \cup B^c)$ 의 모든 원소의 총합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 95

해설

$$\begin{aligned} A &= \{a|a \text{는 } 24 \text{의 약수}\} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\} \\ B &= \{b|b \text{는 } 36 \text{의 약수}\} = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\} \\ (A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) &= (A \cup B) \cap (A \cap B)^c \\ &= (A \cup B) - (A \cap B) \\ &= \{8, 9, 18, 24, 36\} \end{aligned}$$

따라서 원소의 총합은 $8 + 9 + 18 + 24 + 36 = 95$

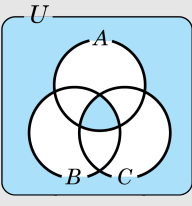
20. 전체집합 $U = \{x|x \text{는 } 20 \text{ 이하의 자연수}\}$ 의 세 부분집합
 $A = \{x|x \text{는 } 20 \text{ 이하의 } 3\text{의 배수}\}$,
 $B = \{x|x \text{는 } 20 \text{ 이하의 } 4\text{의 배수}\}$,
 $C = \{1, 2, 5, 7, 11, 12\}$ 에 대하여 $A\Delta B = (A \cap B) \cup (A \cup B)^c$ 일 때,
 $n((A\Delta B) \cap (A\Delta C))$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$(A\Delta B) \cap (A\Delta C)$ 를 벤 다이어그램에 나타내면 다음과 같다.



$$n(A \cap B \cap C) = 1, n((A \cup B \cup C)^c) = 5$$

$$\therefore n((A\Delta B) \cap (A\Delta C)) = 1 + 5 = 6$$

21. 어떤 반에서 A, B 두 종류의 책에 대하여 그것을 읽었는지 여부를 조사하였더니 A를 읽은 학생은 전체의 $\frac{1}{2}$, B를 읽은 학생은 전체의 $\frac{3}{5}$, 두 종류 모두 읽은 학생은 전체의 $\frac{3}{10}$, 하나도 읽지 않은 학생은 8명이었다. 반 전체의 학생 수는 몇 명인가?

① 10명 ② 20명 ③ 30명 ④ 40명 ⑤ 50명

해설

A, B 두 종류의 책을 읽은 학생의 집합을 각각 A, B라 하고, 그 반 전체의 인원수를 N 이라 하면, $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{5} - \frac{3}{10} \right) N = \frac{4}{5} N$$

$$\text{따라서, } n(A^c \cap B^c) = n((A \cup B)^c) = N - n(A \cup B) = \frac{1}{5} N$$

그런데, $\frac{1}{5} N = 8$ 이므로 $N = 40$ (명)

22. 한 쪽 면에는 영문자, 다른 쪽 면에는 숫자가 적혀있는 카드가 다음 규칙을 만족한다.

카드의 한 쪽 면에 모음이 적혀 있으면 다른 쪽 면에는 짝수가 적혀 있다.

탁자 위에 그림과 같이 놓인 카드 4 장이 위 규칙에 맞는 카드인지 알기 위해 다른 쪽 면을 확인해야 할 필요가 있는 것은?

2

3

d

e

①

2

d

②

2

e

③

3

d

④

3

e

⑤

2

3

d

e

해설

(모음 → 짝수) ↔ (홀수 → 자음) 이므로 모음인 면을 뒤집어 짝수가 있음을 확인하고 홀수인 면을 뒤집어 자음이 있음을 확인 하면 된다. 자음인 면의 뒤에는 어떤 수가 와도 좋고 짝수인 면의 뒤에는 모음, 자음이 모두 가능하다. 따라서 모음이 쓰여진 카드

e

 , 홀수가 쓰여진 카드

3

 의 다른 쪽 면을 확인해야 한다.

23. 다음은 ‘자연수 n 에 대하여, n^2 이 3의 배수이면 n 도 3의 배수이다.’라는 명제를 대우를 이용하여 증명하는 과정이다. (가), (나), (다), (라), (마)에 들어갈 알맞은 식 또는 수끼리 짝지은 것을 고르면?

대우는 ‘자연수 n 에 대하여, n 이 3의 배수가 아니면 n^2 도 3의 배수가 아니다.’이다. 3의 배수가 아닌 자연수 n 은 3으로 나누면 나머지가 1 또는 2이므로
 $n = (\text{가})$ 또는 $n = (\text{나})$ (단, k 는 음이 아닌 정수)로 가정할 수 있다.
(i) $n = (\text{가})$ 일 때
 $n^2 = 3(\text{다}) + 1$
(ii) $n = (\text{나})$ 일 때
 $n^2 = 3(\text{라}) + 1$
이 되어 n^2 은 3으로 나누면 나머지가 (마)인 자연수가 된다.
(i), (ii)에 의하여 n 이 3의 배수가 아니면 n^2 도 3의 배수가 아니다. 그러므로 주어진 명제는 참인 명제이다.

① $3k - 2, 3k - 1, (3k^2 + 2k), (3k^2 + 4k + 1), 2$

② $3k - 1, 3k - 2, (3k^2 - 4k + 1), (3k^2 - 2k), 1$

③ $3k + 2, 3k + 1, (3k^2 + 2k), (3k^2 + 4k + 1), 2$

④ $3k - 2, 3k - 1, (3k^2 - 4k + 1), (3k^2 - 2k), 1$

⑤ $3k + 1, 3k + 2, (3k^2 + 2k), (3k^2 + 4k + 1), 1$

해설

3의 배수가 아닌 수들은 3으로 나뉘서 1 또는 2가 남아야 하므로 $3k + 1$ 또는 $3k + 2$ 이어야 한다.
제곱을 하여 계산하면 (다), (라)는 각각 $(3k^2 + 2k), (3k^2 + 4k + 1)$ 가 되고, 나머지가 1인 자연수가 된다.
따라서 주어진 명제는 참인 명제이다.

24. $x > -1$ 일 때 $x + \frac{1}{x+1}$ 의 최솟값을 m , 그 때의 x 의 값을 k 라 할 때 $m+k$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$x+1 > 0 \text{ 이므로 } x + \frac{1}{x+1} = x+1 + \frac{1}{x+1} - 1 \geq$$

$$2\sqrt{(x+1)\frac{1}{x+1}} - 1 = 1$$

$$\therefore m = 1$$

이 때 등호는

$$x+1 = \frac{1}{x+1} \text{ 에서 } x = 0, -2$$

$x > -1$ 이므로 등호는 $x = 0$ 일 때만 성립한다.

$$\therefore k = 0$$

$$\therefore m+k = 1$$

