1. 다음 $\boxed{}$ 안에 들어갈 알맞은 것은?(단, $A \cap B \neq \varnothing$)

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - \boxed{}$$

① $n(A)$　② $n(B)$　③ $n(A \cap B)$
④ $n(A \cup B)$　⑤ $n(\varnothing)$

해설

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

2. 세 수 $A = \sqrt{6} + \sqrt{7}, B = \sqrt{5} + 2\sqrt{2}, C = \sqrt{3} + \sqrt{10}$의 대소 관계를 바르게 나타낸 것은?

① $A < B < C$ ② $A < C < B$ ③ $B < A < C$

④ $C < A < B$ ⑤ $C < B < A$

해설

$A > 0,\ B > 0,\ C > 0$ 이므로

A^2, B^2, C^2 의 대소를 비교한 것과 같다.

$A^2 = (\sqrt{6} + \sqrt{7})^2 = 13 + 2\sqrt{42}$

$B^2 = (\sqrt{5} + 2\sqrt{2})^2 = 13 + 2\sqrt{40}$

$C^2 = (\sqrt{3} + \sqrt{10})^2 = 13 + 2\sqrt{30}$

이므로 $A^2 > B^2 > C^2$ 이다.

따라서 $A > B > C$

3. 두 점 $\mathrm{A}(-1, 2)$, $\mathrm{B}(a,\ b)$를 이은 선분 AB를 $2:3$으로 외분하는 점의 좌표가 $(-13, 12)$일 때, $a,\ b$의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$\mathrm{A}(-1, 2)$, $\mathrm{B}(a,\ b)$에서
선분 AB를 $2:3$으로 외분하는 점은
$\left(\dfrac{2a-3\cdot(-1)}{2-3},\ \dfrac{2b-3\cdot 2}{2-3}\right)$
$=(-2a-3, -2b+6)=(-13, 12)$이므로
$-2a-3=-13,\ -2b+6=12$
$\therefore\ a=5,\ b=-3$

4. 네 점 O(0, 0), A(3, 1), B(4, 3), C(a, b)를 꼭짓점으로 하는 □OABC가 평행사변형일 때, $a+b$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

평행사변형 OABC에서 두 대각선 OB, AC의 중점이 일치하므로

$\left(2,\ \frac{3}{2}\right)=\left(\frac{a+3}{2},\ \frac{b+1}{2}\right)$

$\frac{a+3}{2}=2$에서 $a=1$

$\frac{b+1}{2}=\frac{3}{2}$에서 $b=2$

$\therefore\ a+b=3$

5. 원 $x^2 + y^2 = 4$ 에 접하고 기울기가 1인 접선의 방정식은 $y = x \pm$ (　　　)이다. (　　　)안의 값을 구하면?

① $\sqrt{2}$　② $2\sqrt{2}$　③ $3\sqrt{2}$　④ $4\sqrt{2}$　⑤ $5\sqrt{2}$

해설

직선과 원이 접하면 원의 중심에서 직선에 이르는 거리는 반지름과 같다.

$y = x + k$ 라 하면

$$\frac{|k|}{\sqrt{1^2+1^2}} = 2,\ \ k = \pm 2\sqrt{2}$$

$\therefore\ \ y = x \pm 2\sqrt{2}$

6. 점 $(5, 1)$ 을 직선 $y = 3$ 에 대하여 대칭이동한 다음 y 축의 방향으로 4 만큼 평행이동한 점은 점 $(5, 1)$ 을 직선 $y = b$ 에 대하여 대칭이동한 점과 같다. 이때, 상수 b 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

(i) 점 $(5, 1)$ 을 직선 $y = 3$ 에 대하여
대칭이동한 점의 좌표는 $(5, 2 \cdot 3 - 1)$ 즉, $(5, 5)$
점 $(5, 5)$ 를 다시 y 축의 방향으로 4 만큼
평행이동한 점의 좌표는 $(5, 5 + 4)$
즉, $(5, 9)$

(ii) 점 $(5, 1)$ 을 직선 $y = b$ 에 대하여
대칭이동한 점의 좌표는 $(5, 2b - 1)$

(i), (ii) 로부터 $2b - 1 = 9$ $\quad \therefore b = 5$

7. 다음 보기의 대응 중에서 함수인 것을 모두 고른 것은 무엇인가?

보기

㉠ 원의 반지름의 길이와 그 넓이의 대응
㉡ 이차방정식과 그 방정식의 실근의 대응
㉢ 선분과 그 길이의 대응
㉣ 함수와 그 함수의 정의역의 대응
㉤ 실수와 그 실수를 포함하는 집합의 대응

① ㉠, ㉡, ㉢ ② ㉠, ㉡, ㉤ ③ ㉠, ㉢, ㉣
④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉣, ㉤

해설

㉠ 모든 원의 반지름의 길이 r는 오직 하나의 넓이 πr^2에 대응되므로 함수가 될 수 있다.
㉡ 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서 $b^2-4ac<0$이면 대응을 갖지 못하고(허근), $b^2-4ac>0$이면 두 개의 대응을 가지므로 (서로 다른 두 실근) 함수가 될 수 없다.
㉢ 모든 선분은 오직 하나의 길이에 대응되므로 함수가 될 수 있다.
㉣ 모든 함수는 반드시 정의역을 갖고 그 정의역은 유일하므로 함수가 될 수 있다.
㉤ 특정한 실수 a를 포함하는 집합은 $\{a\}$, $\{a, b\}$, $\{a, b, c\}$, $\cdots$ 등 무수히 많다. 즉, 실수 a에 a를 포함하는 무수히 많은 집합들이 대응되므로 함수가 될 수 없다.
따라서 함수인 것은 ㉠, ㉢, ㉣이다.

8. 함수 $f(x)$ 는 임의의 두 실수 $a,\ b$ 에 대하여 $f(a+b)=f(a)+f(b)$ 를 만족시킨다. 이러한 함수를 다음에서 고르면?

① $f(x)=|x|$ ② $f(x)=-x^2$

③ $f(x)=3x$ ④ $f(x)=2x+3$

⑤ $f(x)=x^3+3x$

해설

① $f(a+b)=|a+b|$

$f(a)+f(b)=|a|+|b|$

이 때 $|a+b|\le|a|+|b|$

② $f\ (a+b)=-(a+b)^2=-a^2-2ab-b^2$

$f(a)+f(b)=-a^2-b^2$

③ $f(a+b)=3(a+b)=3a+3b=f(a)+f(b)$

④ $f(a+b)=2(a+b)+3$

$f(a)+f(b)=2a+3+2b+3=2(a+b)+6$

⑤ $$\begin{aligned} f(a+b) &= (a+b)^3+3(a+b) \\ &= (a+b)(a^2+2ab+b^2+3) \\ f(a)+f(b) &= a^3+3a+b^3+3b \\ &= a^3+b^3+3(a+b) \\ &= (a+b)(a^2-ab+b^2+3) \end{aligned}$$

9. 실수 x, y에 대하여 $f(xy) = f(x)f(y)$ 이고 f가 일대일대응일 때, $f(0)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

0이 아닌 x에 대하여 $y = 0$을
$f(xy) = f(x)f(y)$에 대입하자.
$f(0) = f(x)f(0) \Leftrightarrow f(0) - f(0)f(x) = 0$
$\Leftrightarrow f(0)[1 - f(x)] = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$ 또는 $f(x) = 1$
만일 $f(x) = 1$이면
$f(0) = 1$, $f(1) = 1$, $f(2) = 1$,$\cdots$ 이다.
위는 $f(x)$가 일대일대응이라는 것과 모순이므로
$f(x) = 1$은 부적당
$\therefore f(0) = 0$

10. 실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 f, g 에 대하여 $f(x)$ 는 항등함수이고, $g(x) = -2$ 인 상수함수일 때, $f(4) + g(-1)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$f(x)$ 는 항등함수이므로 $f(x) = x$ 에서 $f(4) = 4$
$g(x) = -2$ 에서 $g(-1) = -2$
$\therefore f(4) + g(-1) = 4 - 2 = 2$

11. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 세 함수 $f,\ g,\ h$ 에 대하여 $(h \circ g)(x) = 3x+4$, $f(x) = x^2$ 일 때, $(h \circ (g \circ f))(2)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 16

해설

$$\begin{aligned}(h \circ (g \circ f))(2) &= ((h \circ g) \circ f)(2) \\ &= (h \circ g)(f(2)) \\ &= (h \circ g)(4) \\ &= 3 \times 4 + 4 = 16\end{aligned}$$

12. 두 원 $x^2 + y^2 = 1$, $(x-a)^2 + (y-b)^2 = 4$에 대하여 두 원이 외접할 때 $a^2 + b^2$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 9

해설

외접하기 위한 조건은 $\sqrt{a^2 + b^2} = 2 + 1$
$\therefore a^2 + b^2 = 9$

13. 점 $(2,\ 3)$ 을 점$(1,\ 5)$ 로 옮기는 평행이동 T 에 의하여 직선 $y = ax+b$ 가 직선 $y = 3x-2$ 로 옮겨질 때, 상수 a, b 의 곱 ab 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -21

해설

평행이동 T 에 의하여 점 $(2,3)$ 이 점$(1,5)$ 로 옮겨지므로
$T : (x,y) \rightarrow (x+m, y+n)$ 이라고 하면,
$(2,3) \xrightarrow{T} (1,5)$ 에서
$2+m = 1, 3+n = 5 \qquad \therefore m = -1, n = 2$
$\therefore T : (x,y) \rightarrow (x-1, y+2)$
따라서, T 는 x 축의 방향으로 -1 만큼,
y 축의 방향으로 2 만큼 옮기는 평행이동이다.
한편, 평행이동 T 에 의하여 직선 $y = ax+b$ 가
옮겨지는 직선의 방정식은
$y-2 = a(x+1)+b$
$\therefore y = ax+a+b+2 \cdots\cdots ㉠$
이때, ㉠이 $y = 3x-2$ 와 같아야 하므로
$a = 3, a+b+2 = -2$
$\therefore a = 3, b = -7 \qquad \therefore ab = -21$

14. 직선 $2x+ay+b=0$ 을 x 축의 방향으로 -3 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동하였더니 직선 $3x+2y-6=0$ 과 x 축 위의 점에서 직교하였다. 이 때, $a+b$ 의 값은?

① -16 ② -13 ③ -11 ④ -9 ⑤ -7

해설

직선 $2x+ay+b=0$ 을
x 축의 방향으로 -3 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동하면,
$2(x+3)+a(y-1)+b=0$
$2x+ay-a+b+6=0 \cdots$ ㉠
즉, 직선 ㉠ 의 기울기는 $-\frac{2}{a}$ 이고,
x 절편은 $\frac{a-b-6}{2}$ 이다.
이 때, 직선 ㉠ 이 직선 $3x+2y-6=0$,
즉 $y=-\frac{3}{2}x+3$ 과 x 절편이 같고
서로 직교하므로
(i) $\frac{a-b-6}{2}=2$
$\therefore\ a-b=10$
(ii) $-\frac{2}{a}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)=-1 \quad \therefore\ a=-3$
따라서 (i), (ii) 에서 $a=-3$, $b=-13$ 이므로
$a+b=-3+(-13)=-16$

15. 점$(3,\ 4)$를 직선 $x-y+2=0$에 대하여 대칭이동한 점을 구하면?

① $(1,\ 5)$　② $(2,\ 5)$　③ $(3,\ 5)$
④ $(4,\ 5)$　⑤ $(6,\ 5)$

해설

구하려는 점을 $(a,\ b)$라 하면, $(3,\ 4)$와 $(a,\ b)$의 중점은 $x-y+2=0$ 위를 지나고, 두 점을 이은 직선과 $x-y+2=0$은 수직이다.
따라서 중점인 $\left(\frac{a+3}{2},\ \frac{b+4}{2}\right)$를 $x-y+2=0$ 에 대입하면
$a-b=-3\cdots$①
수직조건은 기울기의 곱이 -1이므로 $x-y+2=0$의 기울기가 1일때 두점을 지나는 기울기는 -1이다.
$\frac{b-4}{a-3}=-1$, $a+b=7\cdots$②
따라서 ①, ②를 연립하면 $a=2, b=5$