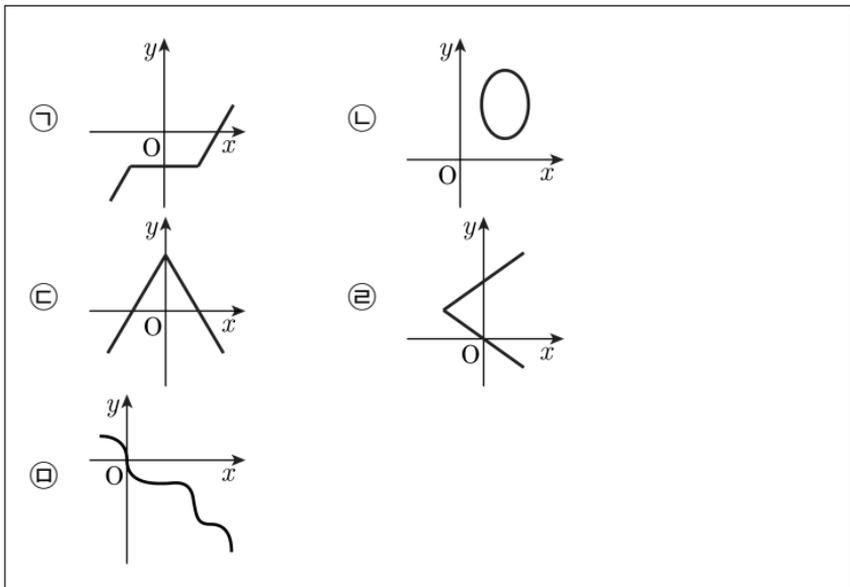


1. 다음 그래프 중 함수인 것은?



① ㉠, ㉡, ㉢

② ㉠, ㉢, ㉤

③ ㉠, ㉢, ㉣

④ ㉡, ㉢, ㉤

⑤ ㉢, ㉣, ㉤

해설

㉠ 함수

㉡ 함수가 아니다.

㉢ 함수

㉣ 함수가 아니다.

㉤ 함수

따라서 ㉠, ㉢, ㉤만이 함수이다.

2. 두 집합 $X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $Y = \{y|y \text{는 정수}\}$ 일 때, 함수 $f : X \rightarrow Y$ 를 다음과 같이 정의한다. 이 때, f 의 치역의 모든 원소의 합을 구하여라.

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & (x > 0) \\ -x^2 + 1 & (x \leq 0) \end{cases}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$f(-2) = -(-2)^2 + 1 = -3$$

$$f(-1) = -(-1)^2 + 1 = 0$$

$$f(0) = 1$$

$$f(1) = 1 + 2 = 3$$

$$f(2) = 2 + 2 = 4$$

따라서 치역은 $\{-3, 0, 1, 3, 4\}$ 이므로

모든 원소의 합은 $(-3) + 0 + 1 + 3 + 4 = 5$

3. 집합 $X = \{1, 2\}$, $Y = \{a, b\}$ 라 할 때, 집합 X 에서 Y 로의 함수의 개수를 구하면?

① 1 가지

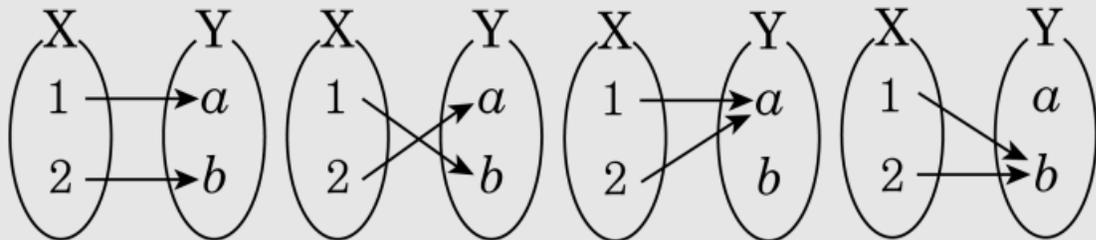
② 2 가지

③ 3 가지

④ 4 가지

⑤ 5 가지

해설



\therefore 4가지

4. 실수 전체의 집합에 대하여 공집합이 아닌 부분집합 X 를 정의역으로 하는 두 함수 $f(x) = 2x^2 - 10x - 5$, $g(x) = -x^2 + 2x + 10$ 이 서로 같을 때, 집합 X 의 개수는 몇 개인가?

① 0개

② 1개

③ 2개

④ 3개

⑤ 4개

해설

$f(x) = g(x)$ 이므로

$$2x^2 - 10x - 5 = -x^2 + 2x + 10 \text{에서}$$

$$3x^2 - 12x - 15 = 0, 3(x^2 - 4x - 5) = 0$$

$$(x - 5)(x + 1) = 0$$

$$\therefore x = 5, -1$$

즉, $x = 5$ 또는 $x = -1$ 일 때 $f(x) = g(x)$ 이다.

$$\therefore X = \{-1\}, \{5\}, \{-1, 5\}$$

5. 두 함수 $f(x) = 3x + 1$, $g(x) = 4x + a$ 에 대하여 $(g \circ f)(x) = 12x + 7$ 이 성립할 때, 상수 a 의 값은?

① -3

② -1

③ 1

④ 3

⑤ 5

해설

$f(x) = 3x + 1$, $g(x) = 4x + a$ 이므로

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x + 1)$$

$$= 4(3x + 1) + a$$

$$= 12x + 4 + a$$

따라서 $12x + 4 + a = 12x + 7$ 에서 $4 + a = 7$

$$\therefore a = 3$$

6. 두 함수 $f(x) = ax + b$, $g(x) = ax + c$ 에 대하여 $f \circ g = g \circ f$ 가 성립하기 위한 필요충분조건은 무엇인가?

① $a = 1$ 또는 $b = c$

② $a = 1$

③ $b = c$

④ $a = 0$ 또는 $b = c$

⑤ $a = 0$

해설

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(ax + c) \\ &= a(ax + c) + b \\ &= a^2x + ac + b\end{aligned}$$

마찬가지로 $(g \circ f)(x) = a^2x + ab + c$

$$\therefore ac + b = ab + c$$

즉, $(a - 1)(b - c) = 0$

$$\therefore a = 1 \text{ 또는 } b = c$$

7. 함수 $f(x)$ 가 $f(2x+1) = 3x+2$ 를 만족할 때, $f(3)$ 의 값을 구하면?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$f(2x+1) = 3x+2$ 에서 $2x+1 = 3$ 이므로

$x = 1$ 을 대입하면

$$f(2 \cdot 1 + 1) = f(3) = 3 \cdot 1 + 2 = 5$$

8. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 함수 f 가 $f : x \rightarrow x + 1$ 로 주어질 때, $f^{2006}(2)$ 의 값은 얼마인가? (단, $f^1 = f$, $f^{n+1} = f \circ f^n$, n 은 자연수)

① 2002

② 2004

③ 2006

④ 2008

⑤ 2010

해설

$$f^2(x) = f(f(x)) = (x + 1) + 1 = x + 2$$

$$f^3(x) = f(f^2(x)) = (x + 2) + 1 = x + 3$$

$$f^4(x) = f(f^3(x)) = (x + 3) + 1 = x + 4$$

⋮

이상에서 $f^n(x) = x + n$ 이므로

$$f^{2006}(x) = x + 2006$$

$$\therefore f^{2006}(2) = 2 + 2006 = 2008$$

9. 집합 $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4\}$ 에 대하여 함수 $f : X \rightarrow Y$ 에서 치역의 원소의 개수가 2 개인 함수 f 의 개수를 구하시오.

▶ 답: 개

▷ 정답: 36 개

해설

원소가 2 개인 치역은

$\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{2, 3\}$, $\{2, 4\}$,

$\{3, 4\}$ 로 6 개이다.

정의역의 원소가 3 개, 공역의 원소가 2 개인 함수의 개수는 $2^3 = 8$ 인데

이 중에서 치역의 원소가 1 개인 함수가 각각 2 개이므로 $8 - 2 = 6$ 따라서 $6 \times 6 = 36$ 개

10. 다음 보기의 함수 $f(x)$ 중 $(f \circ f \circ f)(x) = f(x)$ 가 성립하는 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $f(x) = x + 1$

㉡ $f(x) = -x$

㉢ $f(x) = -x + 1$

① ㉠

② ㉡

③ ㉢

④ ㉠, ㉢

⑤ ㉡, ㉢

해설

$$\begin{aligned}\text{㉠. } (f \circ f \circ f)(x) &= f(f(f(x))) = f(f(x+1)) \\ &= f((x+1)+1) = f(x+2) \\ &= (x+2)+1 = x+3 \\ \therefore (f \circ f \circ f)(x) &\neq f(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{㉡. } (f \circ f \circ f)(x) &= f(f(f(x))) = f(f(-x)) \\ &= f(-(-x)) = f(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{㉢. } (f \circ f \circ f)(x) &= f(f(f(x))) = f(f(-x+1)) \\ &= f(-(-x+1)+1) = f(x)\end{aligned}$$

따라서 $(f \circ f \circ f)(x) = f(x)$ 가 성립하는 것은 ㉡, ㉢ 이다.