1. 직선 $x+4y=4$ 가 x 축, y 축에 의하여 잘린 부분의 길이는 (가) 이고, 이 직선과 양축에 의하여 둘러싸인 도형의 넓이는 (나) 이다. (가), (나) 에 알맞은 값은?

① $\sqrt{15},\ 2$
② $4,\ 2\sqrt{2}$
③ $\sqrt{17},\ 2$
④ $3\sqrt{2},\ 2$
⑤ $\sqrt{17},\ 2\sqrt{17}$

해설

$\frac{x}{4}+y=1$ 에서 x 절편은 4,

y 절편은 1 이므로 길이는 $\sqrt{17}$, 넓이는 2

2. 두 점 A(1, 2), B(−3, 4) 를 지나는 직선에 평행하고 y 절편이 −1 인 직선의 방정식은 $y = ax + b$ 이다. 이 때, $a + b$ 의 값은 ?

① -2　② $-\frac{3}{2}$　③ 0　④ $\frac{3}{2}$　⑤ 2

해설

직선 $y = ax + b$ 는 두 점 A(1, 2), B(−3, 4) 를 지나는 직선에 평행하므로 기울기는 같다.

$\therefore\ a = \frac{2-4}{1-(-3)} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$

또, y 절편이 −1 이므로 $b = -1$

$\therefore\ a + b = -\frac{1}{2} + (-1) = -\frac{3}{2}$

3. 직선 $y = -x + 1$ 의 기울기와 y 절편, x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

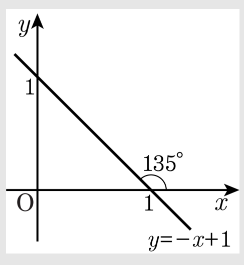
▷ 정답 : 기울기 -1

▷ 정답 : y 절편 1

▷ 정답 : x 축의 양의 방향 $135°$

해설

기울기 -1, y 절편 1,
x 축의 양의 방향과
이루는 각 $135°$



4. 직선 $2x+4y+1=0$에 평행하고, 두 직선 $x-2y+10=0$, $x+3y-5=0$의 교점을 지나는 직선을 $y=ax+b$라 할 때 $2a+b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

직선 $2x+4y+1=0$의 기울기는

$y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$ 에서 $-\frac{1}{2}$

또, $x-2y+10=0$, $x+3y-5=0$을 연립하여 풀면

$x=-4,\ y=3$

$y-3=-\frac{1}{2}(x+4)$

$\therefore y=-\frac{1}{2}x+1$이므로

$a=-\frac{1}{2}$, $b=1$

$\therefore\ \ 2a+b=0$

5. 좌표평면에서 원 $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 8 = 0$을 평행이동하여 원 $x^2 + y^2 = c$를 얻었다. 이 때, 상수 c의 값은?

① 3 ② 5 ③ 6 ④ 9 ⑤ 16

해설

$x^2 + y^2 + 4x - 6y + 8 = 0$을 변형하면

$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 5$

이 원이 평행이동하여 $x^2 + y^2 = c$가 되려면 $c = 5$

6. 점 (2, 3) 을 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 점 (2, 3) 을 x 축 방향으로 m 만큼, y 축 방향으로 n 만큼 평행이동한 점의 좌표와 같다. 이 때, $m+n$ 의 값을 구하면?

① -10　② -11　③ -12　④ -13　⑤ -14

해설

점 (2, 3) 을 원점 대칭 이동시킨 점은 $(-2, -3)$
이 점은 x 축으로 -4 , y 축으로 -6만큼 평행이동 시킨 것과 같다
$\therefore\ m+n=-4-6=-10$

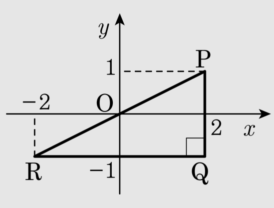
7. 점 P(2, 1) 을 x 축에 대하여 대칭이동한 점을 Q, 원점에 대하여 대칭이동한 점을 R 라 할 때, 세 점 P, Q, R 를 세 꼭짓점으로 하는 △PQR 의 넓이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

점 P(2, 1) 을 x 축에 대하여 대칭이동한
점 Q 는 Q(2, −1)
또, 점 P(2, 1) 을 원점에 대하여 대칭이동한 점 R 는 R(−2, −1)
따라서, 다음 그림에서 세 점
P(2, 1), Q(2, −1), R(−2, −1) 을 꼭짓점으로 하는△PQR 의 넓이는



$\frac{1}{2} \times 4 \times 2 = 4$

8. $x^2+y^2-4x+2ay-1=0$ 이 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭일 때, 상수 a 의 값을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

원의 방정식을 정리하면,
$(x-2)^2+(y+a)^2=5+a^2$
$y=x$ 에 대칭이려면 원 중심이
$y=x$ 위에 있어야 한다.
$\therefore\ a=-2$

9. 점 $(-1,\ 2)$ 를 원점에 대하여, 대칭 이동시킨 후, x 축 방향으로 a 만큼, y 축 방향으로 b 만큼 평행 이동시켰다. 그 후 다시 $y=x$ 에 대하여 대칭 이동시켰더니 $(3,\ 2)$ 가 되었다. 이 때, ab 의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

$(-1,\ 2) \xrightarrow{\text{원점대칭}} (1,\ -2) \xrightarrow{x\text{축으로 }a\text{만큼 평행이동}} (1+a,\ -2) \xrightarrow{y\text{축으로 }b\text{만큼 평행이동}} (1+a,\ -2+b)$
$\xrightarrow{y=x\text{대칭}} (-2+b,\ 1+a) = (3,\ 2)$
$\therefore\ a=1,\ b=5$

10. 원 $x^2 + y^2 = 1$ 을 직선 $y = -x + 2$ 에 관하여 대칭이동한 식에서 중심의 좌표는?

① $(1, 1)$ ② $(1, 2)$ ③ $(2, 1)$ ④ $(2, 2)$ ⑤ $(2, 3)$

해설

원 중심 $\mathrm{O}(0, 0)$ 을 $y = -x + 2$ 에 대해 대칭이동 하면 된다. 대칭 이동점을 $\mathrm{O}'(a, b)$ 라 하면, $\overline{\mathrm{OO}'}$ 은 $y = -x + 2$ 에 수직하고, $\overline{\mathrm{OO}'}$ 의 중점은 $y = -x + 2$ 위에 있다.

$\Rightarrow \quad \frac{b}{a} = 1 \quad \cdots$①,

$\frac{b}{2} = -\frac{a}{2} + 2 \quad \cdots$ ②

①,②를 연립하면, $a = 2,\ b = 2$

$\therefore$ 중심좌표 : $(2,\ 2)$

11. 자연수 n에 대하여 $n(n+1)(n+2)$ 의 일의 자리의 숫자를 $f(n)$ 이라 하자. 예를 들어 $f(1)=6, f(2)=4$ 이다. 이 때, $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(20)$ 의 값은 얼마인지 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 40

해설

$n=1$ 이면 $1\cdot2\cdot3=6 \quad \therefore f(1)=6$
$n=2$ 이면 $2\cdot3\cdot4=24 \quad \therefore f(2)=4$
$n=3$ 이면 $3\cdot4\cdot5=60 \quad \therefore f(3)=0$
$n=4$ 이면 $4\cdot5\cdot6=120 \quad \therefore f(4)=0$
$n=5$ 이면 $5\cdot6\cdot7=210 \quad \therefore f(5)=0$
$n=6$ 이면 $6\cdot7\cdot8=\times\times6 \quad \therefore f(6)=6$
$n=7$ 이면 $7\cdot8\cdot9=\times\times4 \quad \therefore f(7)=4$
$n=8$ 이면 $8\cdot9\cdot10=\times\times0 \quad \therefore f(8)=0$

$\vdots$

따라서 $6,4,0,0,0$ 이 반복하여 나타남을 알 수 있다.
$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(20)=(6+4+0+0+0)\times4=40$

12. X를 정의역으로 하는 두 함수 $f(x)=2x^2-3x+4$, $g(x)=x^2+x+1$에 대하여 $f=g$ 가 성립하도록 하는 집합 X의 개수는?

① 1개　② 2개　③ 3개　④ 4개　⑤ 5개

해설

두 함수가 같다는 것은 정의역의 임의의 x값에 대하여 그 함수값이 같다는 것이다.
그러므로 $f(x)=g(x)$를 만족시키는 x들만을 원소로 갖는 집합이 정의역이 된다.
따라서 $2x^2-3x+4=x^2+x+1$, $x^2-4x+3=0$
$(x-3)(x-1)=0$
$\therefore x=1,\ 3$
따라서 1, 3을 원소로 갖는 집합을 구하면 된다.
즉,$\{1\}$, $\{3\}$, $\{1,\ 3\}$

13. 두 정점 $A(-1,\ 0)$, $B(2,\ 0)$ 으로부터 거리의 비가 $1\ :\ 2$ 인 점 P 에 대하여 다음 <보기> 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $\triangle PAB$ 의 넓이의 최댓값은 3 이다.
㉡ $\angle PBA$ 의 최대 크기는 $60°$ 이다.
㉢ 점 P 의 자취의 길이는 4π 이다.

① ㉠　② ㉠, ㉡　③ ㉠, ㉢
④ ㉡, ㉢　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

두 정점 $A(-1,\ 0)$, $B(2,\ 0)$ 으로부터 거리의 비가 $1\ :\ 2$ 인 점 P 의 자취는 $(0,0)$ 과 $(-4,0)$ 을 지름의 양 끝으로 하는 원이다. 따라서 이 원은 $(x+2)^2+y^2=4$ 로 나타낼 수 있다.
삼각형 밑변의 길이가 정해져있으므로 높이가 최대일 때 삼각형의 넓이도 최대가 된다.
따라서 원의 반지름인 2 가 높이일 때의 넓이인 3 이 최댓값이다.
$\angle PBA$ 의 최대 크기는 점 P 가 원에 접할 때이므로 $\sin(\angle PBA)=\dfrac{2}{2-(-2)}=\dfrac{1}{2}$ 에서
$\angle PBA = 30°$
점 P 의 자취의 방정식은 $(x+2)^2+y^2=4$ 이므로 둘레의 길이는 4π 이다

14. 점 $(1,\ -1)$에서 원 $(x+1)^2+(y-2)^2=1$에 그은 접선은 두 개 있다. 이 때, 이 두 직선의 기울기의 합은?

① -3 ② -4 ③ -5 ④ -6 ⑤ -7

해설

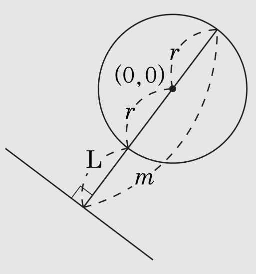
점 $(1,\ -1)$을 지나고 기울기가 m인 접선을
$y+1=m(x-1)$, 즉 $mx-y-m-1=0$이라고 하면
원의 중심 $(-1,\ 2)$에서 접선까지의 거리는
원의 반지름 1과 같아야 한다.
따라서 $1=\dfrac{|-2m-3|}{\sqrt{m^2+1}}$,
$|-2m-3|=\sqrt{m^2+1}$
양변을 제곱하여 정리하면 $3m^2+12m+8=0$
따라서 두 기울기의 합은 근과 계수와의 관계에 의하여 -4이다.

15. 원 $x^2+y^2=1$ 과 직선 $3x+4y+10=0$ 과의 최소거리와 최대거리의 합을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설



먼저 원의 중심과 직선 사이의 거리를 구해보면

$$\frac{|0\times 3+0\times 4+10|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2$$

$\Rightarrow$ 반지름보다 크므로 위의 그림과 같이
직선이 원 밖에 위치한다.

$\therefore$ 최소거리는 $L=$ 중심사이의 거리-반지름
$=2-1=1$

$\therefore$ 최대거리는 $m=$ 중심사이의 거리+반지름
$=2+1=3$