1. 다음 무리식의 값이 실수가 되는 x 의 범위를 구하면?

$\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}$

① $1 < x < 3$
② $1 \le x \le 3$
③ $x > 3$
④ $x < 1$
⑤ $x \le 1$ 또는 $x \ge 3$

해설

$x-1 \ge 0$, $x \ge 1 \cdots$ ㉠
$3-x \ge 0$, $x \le 3 \cdots$ ㉡
$\therefore$ ㉠, ㉡을 모두 만족하는 범위는 $1 \le x \le 3$

2. 다음 중 $\sqrt{8}+\sqrt{18}$을 바르게 계산한 것은?

① $\sqrt{26}$ ② $2(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ ③ 7
④ $5\sqrt{2}$ ⑤ $2\sqrt{13}$

해설
$\sqrt{8}+\sqrt{18}=2\sqrt{2}+3\sqrt{2}=5\sqrt{2}$

3. $x = \dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$, $y = \dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$ 일 때, $(x+y)^2+(x-y)^2$ 의 값은?

① $2\sqrt{6}$ ② $-2\sqrt{6}$ ③ $5+2\sqrt{6}$
④ $5-2\sqrt{6}$ ⑤ $10-2\sqrt{6}$

해설

$x+y=\sqrt{5},\ x-y=-\sqrt{3}+\sqrt{2}$
$\therefore (x+y)^2+(x-y)^2 = 5+\left(5-2\sqrt{6}\right)$
$= 10-2\sqrt{6}$

4. $x = 2 + \sqrt{3},\ y = 2 - \sqrt{3}$ 일 때, $\frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ 의 값은?

① 14 ② 16 ③ 18 ④ 20 ⑤ 22

해설

$x = 2 + \sqrt{3},\ y = 2 - \sqrt{3}$ 일 때,

$xy = 4 - 3 = 1,\ x + y = 4$

$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{x^2 + y^2}{xy} = \frac{14}{1} = 14$

$(\therefore x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy)$

5. 다음 무리함수 중 함수 $y = \sqrt{-x}$을 평행이동하여 얻을 수 없는 것을 고르면?

① $y = \sqrt{-x+2}$

② $y = \sqrt{-(x+1)} + 3$

③ $y = \sqrt{3-x}$

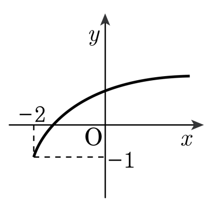
④ $y = \sqrt{x-1} - 1$

⑤ $y = \sqrt{-x} - 1$

해설

$y = \sqrt{-x}$에서 x 앞의 부호가 반대일 경우
평행이동하여 얻을 수 없다.

6. 다음 그래프는 $y=\sqrt{x}$ 의 그래프를 평행 이동한 것이다. 이 그래프의 함수는?



① $y=\sqrt{x-2}+1$

② $y=\sqrt{x-2}-1$

③ $y=\sqrt{x+2}+1$

④ $y=\sqrt{x+2}-1$

⑤ $y=-\sqrt{x-2}-1$

해설

x축으로 -2만큼
y축으로 -1만큼 평행이동했으므로
x 대신 $x+2$, y 대신 $y+1$을 대입하면
$y=\sqrt{x+2}-1$

7. $1 < a < 4$일 때, $\sqrt{(a-4)^2} + |a-1|$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$\sqrt{(a-4)^2} + |a-1|$

$= |a-4| + |a-1|$

$= -a + 4 + a - 1 \ = 3$

8. $\dfrac{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ 을 간단히 하여라.

① $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$ ② $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$ ③ $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$
④ $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$

해설

$\dfrac{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

$=\dfrac{(1-\sqrt{2}+\sqrt{3})(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}$

$=\dfrac{2(1+\sqrt{3})}{(1+2+2\sqrt{2})-3}=\dfrac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$

9. $3+\sqrt{8}$의 소수 부분을 x라 할 때, $\sqrt{x^2+4x}$의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

(1) 단계
$2<\sqrt{8}<3$이므로
$3+\sqrt{8}-2+2=5+\sqrt{8}-2$ 에서
소수 부분 $x=\sqrt{8}-2$
(2) 단계
$x+2=\sqrt{8}$
(양변을 제곱하면) $x^2+4x+4=8$,
$x^2+4x=4$를 대입하면
(준식)$=\sqrt{4}=2$

10. 다음 등식을 만족하는 유리수 x, y의 값을 구하면?

$$x(\sqrt{2}-3)+y(\sqrt{2}+2)=3\sqrt{2}-4$$

① $x=2,\ y=-1$
② $x=-1,\ y=-2$
③ $x=2,\ y=1$
④ $x=-1,\ y=2$
⑤ $x=1,\ y=2$

해설

$(-3x+2y)+(x+y)\sqrt{2}=-4+3\sqrt{2}$

$$\begin{cases}-3x+2y=-4\\ x+y=3\end{cases}$$

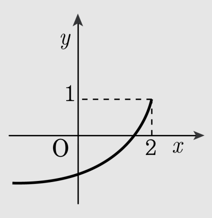
$\therefore\ x=2,\quad y=1$

11. 좌표평면에서 무리함수 $y = -\sqrt{-x+2}+1$ 의 그래프가 지나지 않는 사분면을 모두 구하면?

① 제 1사분면　　② 제 2사분면
③ 제 3사분면　　④ 제 1사분면, 제 2사분면
⑤ 제 3사분면, 제 4사분면

해설

무리함수의 그래프를 그려보면 아래와 같다.



따라서, 무리함수의 그래프가 지나지 않는 것은
제 2사분면이다.

12. 무리함수 $y = \sqrt{9+3x} - 2$ 에 대한 다음 설명 중 옳은 것을 고르면?

① 그래프는 x 축과 점 $\left(\frac{5}{3},\ 0\right)$ 에서 만난다.

② 정의역은 $\{x|x \le -3\}$ 이다.

③ 치역은 $\{y|y \ge -1\}$ 이다.

④ 그래프를 평행이동하면 $y = -\sqrt{3x}$ 의 그래프와 겹칠 수 있다.

⑤ 제4 사분면을 지나지 않는다.

해설

① $y = \sqrt{9+3x} - 2$ 에 $x = \frac{5}{3}$ 를 대입하면

$y = \sqrt{14} - 2$

따라서, 점 $\left(\frac{5}{3},\ \sqrt{14} - 2\right)$ 를 지난다.

② $9 + 3x \ge 0$ 에서 $x \ge -3$

따라서, 정의역은 $\{x|x \ge -3\}$ 이다.

③ $\sqrt{9+3}x \ge 0$ 이므로 치역은

$\{y|y \ge -2\}$ 이다.

④ $y = \sqrt{9+3}x - 2 = \sqrt{3(x+3)} - 2$ 이므로

$y = \sqrt{3x}$ 의 그래프를

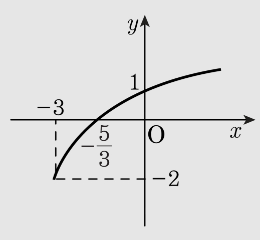
x 축의 방향으로 -3 만큼,

y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 것이다.

⑤ $y = \sqrt{9+3x} - 2$ 의 그래프는

그림과 같으므로

제4 사분면을 지나지 않는다.



13. $x=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ 일 때, x^2-x-2 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$x=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ 에서 $2x=\sqrt{5}+1$

$2x-1=\sqrt{5}$ 의 양변을 제곱하면

$4x^2-4x+1=5\quad\therefore\ x^2-x-1=0$

$\therefore\ x^2-x-2=x^2-x-1-1=0-1=-1$

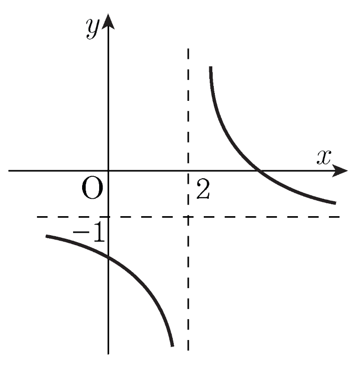
14. 정의역이 $\{x \mid x \le 3\}$, 치역이 $\{y \mid y \ge 4\}$ 인 무리함수 $f(x) = \sqrt{a(x-p)}+q$ 에 대하여 $f(1)=6$ 일 때, $a+p+q$ 의 값을 구하면?

① 2　② 3　③ 4　④ 5　⑤ 6

해설

정의역은 $\left\{x \mid a(x-p) \ge 0\right\} = \{x \mid x \le 3\}$ 이므로 $a<0,\ p=3$
치역은 $\{y \mid y \ge 4\}$이므로 $q=4$
$\therefore\ \ f(x) = \sqrt{a(x-3)}+4$
이때, $f(1)=6$이므로
$\sqrt{-2a}+4=6,\ \sqrt{-2a}=2$, $-2a=4$
$\therefore\ \ a=-2$
$\therefore\ \ a+p+q=-2+3+4=5$

15. 분수함수 $y=\dfrac{b}{x+a}+c$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 무리함수 $y=\sqrt{cx+a}+b$의 그래프가 지나는 사분면을 모두 구하면?



① 제1사분면 ② 제2사분면 ③ 제3사분면
④ 제4사분면 ⑤ 제1, 2사분면

해설

$y=\dfrac{b}{x+a}+c$의 점근선은 $x=-a,\ y=c$

그림에서 $-a>0,\ c<0$이고, $b>0$

$\therefore\ a<0,\ b>0,\ c<0 \cdots$ ㉠

한편 $y=\sqrt{cx+a}+b=\sqrt{c\left(x+\dfrac{a}{c}\right)}+b$이므로

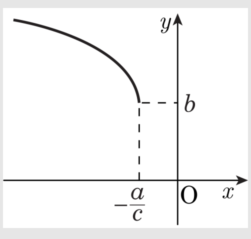
$c\left(x+\dfrac{a}{c}\right)\geq 0$

이때 $c<0$이므로 $x\leq -\dfrac{a}{c}$

㉠에서 $-\dfrac{a}{c}<0$이므로 $x<0$

또 $y=\sqrt{cx+a}+b\geq b$

따라서 그래프는 다음 그림과 같이



제2사분면만을 지난다.

16. $1 \le x \le a$ 일 때, $y = \sqrt{2x-1}+3$ 의 최솟값이 m, 최댓값이 6이다. $a+m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$1 \le x \le a$ 에서, 함수 $y = \sqrt{2x-1}+3$ 은 증가함수이므로
$x = 1$ 일때 최솟값을 가진다.
곧, $m = \sqrt{2-1}+3 = 4$
$\therefore m = 4$
또한, $x = a$ 일 때 최댓값을 가지므로
$6 = \sqrt{2a-1}+3$
$\therefore a = 5$
$\therefore a+m = 9$

17. 무리함수 $y = \sqrt{kx}$의 그래프가 두 점 $(2,\ 2)$, $(3,\ 6)$을 잇는 선분과 만나도록 하는 정수 k의 개수를 구하여라.

▶ 답: ______ 개

▷ 정답: 11개

해설

함수 $y = \sqrt{kx}$의 그래프가 점 $(2,\ 2)$를 지날 때
$2 = \sqrt{2k}$, $2k = 4$
$\therefore k = 2$
또, 함수 $y = \sqrt{kx}$의 그래프가 점 $(3,\ 6)$을 지날 때
$6 = \sqrt{3k}$, $3k = 36$
$\therefore k = 12$
따라서 구하는 실수 k의 값의 범위는
$2 \le k \le 12$ 이므로
정수 k는 $2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ 12$ 의 11개다.

18. $x > 2$에서 정의된 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $f(x) = \sqrt{x-2}+2$, $g(x) = \frac{1}{x-2}+2$일 때 $(f\cdot g)(3)+(g\cdot f)(3)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$(f\cdot g)(3) = f(g(3)) = f(3) = 3$
$(g\cdot f)(3) = g(f(3)) = g(3) = 3$
$\therefore (f\cdot g)(3)+(g\cdot f)(3) = 6$

19. 함수 $y = \sqrt{2x}$ 의 그래프를 x축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 그래프가 나타내는 함수의 식을 $y = f(x)$ 라 할 때, $y = f(x)$ 와 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프가 접하도록 상수 a 의 값을 구하면?

① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{4}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

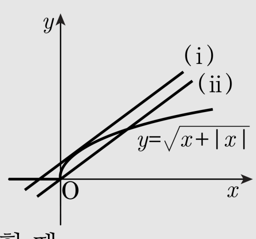
해설

함수 $y = \sqrt{2x}$의 그래프를
x축의 방향으로 a 만큼 평행이동한
그래프의 식은 $y = \sqrt{2(x-a)}$
$y = f(x)$ 와 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프는
직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로
$y = f(x)$ 와 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프가 접하려면
$y = \sqrt{2(x-a)}$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 가 접해야 한다.
즉, $\sqrt{2(x-a)} = x$ 양변을 제곱하여 정리하면
$x^2 - 2x + 2a = 0$
$\frac{D}{4} = (-1)^2 - 2a = 0$ 이므로
$a = \frac{1}{2}$

20. 함수 $y = \sqrt{x+|x|}$와 직선 $y = x+k$가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 실수 k의 값의 범위를 구하면?

① $-1 < k < 0$　　② $-1 < k \le 0$　　③ $0 < k < \frac{1}{2}$
④ $0 \le k < \frac{1}{2}$　　⑤ $0 < k \le \frac{1}{2}$

해설



$x \ge 0$일 때 $y = \sqrt{2x}$이고 $x < 0$일 때 $y = 0$이므로
$y = \sqrt{x+|x|}$의 그래프는
그림과 같고 직선 $y = x+k$와 서로 다른
세 점에서 만나려면
(i)과 (ii)사이에 존재해야 한다.
① 곡선 $y = \sqrt{2x}$와 직선 $y = x+k$가 접할 때
$\sqrt{2x} = x+k$에서 $2x = (x+k)^2$
$x^2 + 2(k-1)x + k^2 = 0$
이 방정식의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4} = (k-1)^2 - k^2 = 0$, $-2k+1 = 0$
$\therefore k = \frac{1}{2}$
② 직선 $y = x+k$가 원점을 지날 때 $k = 0$
①, ②에서 구하는 k의 값의 범위는 $0 < k < \frac{1}{2}$