

1. $\sqrt{60a}$ 가 정수가 되기 위한 가장 작은 자연수 a 를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 15

해설

$\sqrt{60a}$ 가 정수가 되기 위해서는 어떤 정수의 제곱이 되어야 한다.
 $60 = 2^2 \times 3 \times 5$ 이므로 $a = 3 \times 5 = 15$ 이다.

2. $\sqrt{120}$ 에 \sqrt{a} 를 곱했더니 자연수가 되었다. a 의 최솟값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 30

해설

$\sqrt{120} = \sqrt{2^3 \times 3 \times 5}$ 이므로 지수가 홀수인 경우 짝수가 되도록 맞춘다. 이렇게 해서 최솟값으로 만들기 위해서는 $\sqrt{2^4 \times 3^2 \times 5^2}$ 이 되어야 한다.

$$\text{따라서 } \sqrt{120} \sqrt{a} = \sqrt{2^3 \times 3 \times 5} \sqrt{a} = \sqrt{2^4 \times 3^2 \times 5^2}$$

$$\therefore \sqrt{a} = \sqrt{2 \times 3 \times 5}$$

$$\therefore a = 2 \times 3 \times 5$$

3. $\sqrt{56x}$ 가 자연수가 되기 위한 최소의 자연수 x 는?

- ① 2 ② 4 ③ 7 ④ 14 ⑤ 28

해설

$56x = 2^3 \times 7 \times x$ 이므로 가장 작은 자연수 $x = 14$

4. $\sqrt{135 \times a}$ 가 정수가 되는 가장 작은 자연수 a 의 값은?

- ① 17 ② 15 ③ 7 ④ 5 ⑤ 3

해설

$135 \times a$ 가 제곱수이어야 한다. 135 를 소인수분해하면 $3^3 \times 5$ 이다.
따라서, $135a = 3^3 \times 5 \times a$ 꼴이고 제곱수인 3^2 을 제외한 $15a$ 도 제곱수이다.
 \therefore 가장 작은 자연수 a 는 15 이다.

5. $\sqrt{2 \times 3 \times 7^2 \times a}$ 가 정수가 되기 위한 가장 작은 자연수 a 를 구하면?

- ① 2 ② 3 ③ 6 ④ 7 ⑤ 42

해설

$\sqrt{294a} = \sqrt{2 \times 3 \times 7^2 \times a}$ 이 정수가 되기 위해서는 근호안의 수가 완전제곱수가 되어야 하므로 $a = 2 \times 3 \times k^2$ 이 되어야 한다.
∴ 가장 작은 자연수 a 는 $k = 1$ 일 때이므로 $a = 2 \times 3 \times 1^2 = 6$

6. $\sqrt{3^3 \times 5 \times 7 \times x}$ 가 가장 작은 자연수가 되기 위한 정수 x 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 105

해설

$\sqrt{3^3 \times 5 \times 7 \times x}$ 가 자연수가 되기 위해서는 근호안의 수가 완전 제곱수가 되어야 하므로 가장 작은 정수 $x = 3 \times 5 \times 7 = 105$ 이다.

7. a 가 자연수이고 $\sqrt{\frac{18a}{5}}$ 가 정수일 때, a 의 값 중 가장 작은 값은?

① 2

② 3

③ 5

④ 10

⑤ 30

해설

$$\sqrt{\frac{18a}{5}} = \sqrt{\frac{2 \times 3^2 \times a}{5}}$$

$$\therefore a = 2 \times 5 = 10$$

8. 다음 중 $\sqrt{45x}$ 가 자연수가 되게 하는 x 의 값으로 옳지 않은 것을 모두 고르면?

① $\frac{1}{5}$

② $\frac{9}{5}$

③ 25

④ 45

⑤ 75

해설

$$\sqrt{45x} = \sqrt{3^2 \times 5 \times x}$$

③ $\sqrt{3^2 \times 5^3} = 3 \times 5 \times \sqrt{5} = 15\sqrt{5}$ 가 되어 자연수가 되지 못한다.

⑤ $\sqrt{3^3 \times 5^3} = 3 \times 5 \times \sqrt{3 \times 5} = 15\sqrt{15}$ 가 되어 자연수가 되지 못한다.

9. $\sqrt{10x}$ 가 자연수가 되게 하는 가장 작은 자연수 x 를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 10

해설

$\sqrt{10x}$ 가 자연수가 되려면 근호 안의 값은 제곱수가 되어야 한다.
 $\sqrt{10x} = \sqrt{2 \times 5 \times x}$ 이므로 $x = 10$ 이다.

10. $\sqrt{\frac{756}{x}}$ 가 자연수가 되기 위한 x 의 값 중 가장 작은 수는?

- ① 3 ② 6 ③ 7 ④ 21 ⑤ 42

해설

$756 = 2^2 \times 3^3 \times 7$ 이므로 $\sqrt{\frac{2^2 \times 3^3 \times 7}{x}}$ 이 자연수가 되기 위한 자연수 중 가장 작은 값 $x = 3 \times 7 = 21$ 이다.

11. $\sqrt{18a}$ 가 정수가 되기 위한 가장 작은 자연수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

근호 안의 수가 제곱수가 되어야 한다. $\sqrt{18a} = \sqrt{3^2 \times 2 \times a}$
이므로 $a = 2$ 이다.

12. $\sqrt{72n}$ 이 정수가 되도록 하는 가장 작은 자연수 n 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $n = 2$

해설

$\sqrt{72n} = \sqrt{2^3 \times 3^2 \times n}$ 에서 소인수의 지수가 모두 짝수가 되어야 하므로 $n = 2$ 이다.

13. $\sqrt{\frac{24}{x}}$ 가 정수가 될 때, 가장 작은 정수 x 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 6

해설

$\sqrt{\frac{24}{x}} = \sqrt{\frac{2^3 \times 3}{x}}$ 에서 분자의 소인수의 지수가 모두 짝수가 되어야 하므로 $x = 2 \times 3 = 6$ 이다.

14. $\sqrt{18} \times \sqrt{a}$ 의 값을 0이 아닌 가장 작은 정수로 고칠 때, 정수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $a = 2$

해설

$$\sqrt{18} \times \sqrt{a} = \sqrt{3 \times 3 \times 2 \times a} \quad \therefore a = 2$$

15. $\sqrt{\frac{50}{3}}x$ 가 자연수가 되도록 하는 가장 작은 정수 x 를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $x = 6$

해설

$\frac{50}{3}x = \frac{2 \times 5^2 \times x}{3}$ 이므로 $x = 2 \times 3 = 6$ 이다.

16. $\sqrt{\frac{48}{7}}x$ 가 자연수가 되도록 하는 가장 작은 정수 x 를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $x = 21$

해설

$\frac{48}{7}x = \frac{2^4 \times 3 \times x}{7}$ 이므로 $x = 3 \times 7 = 21$ 이다.

17. $\sqrt{75} \times \sqrt{a}$ 의 값을 0이 아닌 가장 작은 정수로 고칠 때, 정수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$\sqrt{75} \times \sqrt{a} = \sqrt{5 \times 5 \times 3 \times a} \quad \therefore a = 3$$

18. $\sqrt{72x}$ 가 자연수가 되기 위한 가장 작은 자연수 x 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $x = 2$

해설

$$\sqrt{72x} = \sqrt{2^2 \times 3^2 \times 2 \times x} = 6\sqrt{2x}$$

$x = 2$ 이면 자연수가 된다.

19. 18 에 자연수 a 를 곱하여 $\sqrt{18a}$ 가 자연수가 되도록 할 때, a 의 값 중 가장 작은 수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$\sqrt{18a} = \sqrt{3 \times 3 \times 2 \times a}, a = 2$$

20. $\sqrt{125x}$ 가 자연수가 되게 하는 가장 작은 자연수 x 의 값을 구하면?

- ① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$$\sqrt{125x} = \sqrt{5^2 \times 5 \times x} \text{ 이므로 } x = 5$$

21. 다음 중 $\sqrt{28x}$ 가 자연수가 되게 하는 x 의 값으로 옳지 않은 것은?

- ① $\frac{1}{7}$ ② 7^2 ③ 28 ④ 63 ⑤ $\frac{4}{7}$

해설

$$\sqrt{28x} = \sqrt{2^2 \times 7 \times x}$$

② $\sqrt{2^2 \times 7^3} = 2 \times 7 \times \sqrt{7} = 14\sqrt{7}$ 이 되어 자연수가 되지 못한다.

22. $\sqrt{\frac{x}{3}}$ 가 정수가 되게 하는 x 의 값 중 두 자리 정수는 모두 몇 개인가?

- ① 4개 ② 5개 ③ 6개 ④ 7개 ⑤ 3개

해설

$10 \leq x \leq 99$, $x = 3k^2$ (k : 정수) 이므로 $x = 3 \times 2^2, 3 \times 3^2, 3 \times 4^2, 3 \times 5^2$

$x = 12, 27, 48, 75$

\therefore 4개

24. $\sqrt{8x}$ 가 자연수가 되기 위한 x 를 모두 구하면? (단, $x < 20$ 인 자연수이다.)

① 2, 8

② 2, 4, 8, 16

③ 2, 8, 9

④ 2, 8, 18

⑤ 2, 8, 19

해설

$$\sqrt{8x} = \sqrt{2^3 \times x}$$

$$x = 2, 2^3, 2 \times 3^2$$

25. $\sqrt{\frac{400x}{12}}$ 가 자연수일 때, 가장 작은 자연수 x 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$\sqrt{\frac{400x}{12}} = 10\sqrt{\frac{x}{3}}$$

따라서 $x = 3$ 이다.

26. $\sqrt{\frac{180}{a}}$ 가 자연수가 되게 하는 정수 a 는 모두 몇 개인가?

- ① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

$$\sqrt{\frac{180}{a}} = \sqrt{\frac{2^2 \times 3^2 \times 5}{a}}$$

$a = 5, 5 \times 2^2, 5 \times 3^2, 5 \times 2^2 \times 3^2$ 이므로 4 개이다.

27. $\sqrt{\frac{54}{n^3}}$ 가 유리수가 되도록 하는 최소의 자연수 n 을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$\sqrt{\frac{54}{n^3}} = \frac{3\sqrt{6}}{n\sqrt{n}}$ 이므로 유리수가 되기 위하여 근호가 없어져야 한다. 따라서 $\sqrt{\frac{54}{n^3}}$ 가 유리수가 되게 하는 최소의 자연수 $n = 6$ 이다.

28. $\sqrt{9x} + \sqrt{48y}$ 가 가장 작은 자연수가 되게 하는 자연수 x 와 y 의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $x + y = 4$

해설

$$\sqrt{9x} + \sqrt{48y} = \sqrt{3^2x} + \sqrt{2^4 \times 3 \times y}$$

$$x = 1, y = 3$$

$$\therefore x + y = 4$$

29. a 가 120과 210 사이의 수일 때, $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{3}}$ 가 정수가 되도록 하는 a 를 모두 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 147

▷ 정답 : 192

해설

$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{3}} = b$ (b 는 정수)이므로 $a = 3b^2$ 의 꼴이면 된다.

$$120 < 3b^2 < 210$$

$$40 < b^2 < 70$$

$$b = 7, 8$$

$$\therefore a = 3 \times 7 \times 7 = 147 \text{ 또는 } a = 3 \times 8 \times 8 = 192$$

30. $\sqrt{\frac{32}{3}}x$ 가 자연수가 되기 위한 x 의 값 중 가장 큰 두 자리 자연수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 96

해설

$$\sqrt{\frac{32}{3}}x = \sqrt{\frac{2^4 \times 2}{3}}x \text{ 이므로 } x = 2 \times 3 \times k^2$$

$$k = 4 \text{ 일 때, } x = 96$$

x 는 가장 큰 두 자리의 자연수이므로 96 이다.

31. n 이 자연수이고 $1 < n < 30$ 일 때, $\sqrt{4n}$ 이 자연수가 되도록 하는 n 의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▷ 정답: 4개

해설

$4n = 2^2 \times n$ 이므로
 $n = 2^2, 3^2, 2^4, 5^2, 2^2 \times 3^2 \dots$ 이 있다.
 $1 < n < 30$ 라고 하였으므로,
 $n = 2^2, 3^2, 2^4, 5^2$ 4개이다.

32. 자연수 x 에 대하여 $1 < x < 50$ 일 때, $\sqrt{20x}$ 가 자연수가 되도록 하는 모든 x 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = 5$

▷ 정답 : $x = 20$

▷ 정답 : $x = 45$

해설

$20x = 2^2 \times 5 \times x$ 이므로

$x = 5, 2^2 \times 5, 3^2 \times 5, 2^4 \times 5 \dots$

$1 < x < 50$ 이므로, $x = 5, 2^2 \times 5, 3^2 \times 5$ 이다.

33. $\sqrt{180x}$ 가 양의 정수가 되도록 하는 가장 작은 두 자리의 자연수 x 를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $x = 20$

해설

$180x = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times x$ 이고,
 x 는 가장 작은 두 자리의 자연수이므로
 $x = 2^2 \times 5 = 20$ 이다.

34. 다음 주어진 식이 자연수 n 이 되도록 하는 m 의 최솟값을 차례대로 구하여라.

	자연수 m 의 최솟값	n
$n = \sqrt{65m}$	㉠	
$n = \sqrt{75m}$	㉡	
$n = \sqrt{\frac{80}{m}}$	㉢	

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▶ 정답: ㉠: 65

▶ 정답: ㉡: 3

▶ 정답: ㉢: 5

해설

㉠ $65m = 5 \times 13 \times m$ 이므로 $m = 5 \times 13 = 65$ 이고 $n = \sqrt{65 \times 65} = 65$ 이다.

㉡ $75m = 3 \times 5^2 \times m$ 이므로 $m = 3$ 이고 $n = \sqrt{75 \times 3} = 15$ 이다.

㉢ $\frac{80}{m} = \frac{2^4 \times 5}{m}$ 이므로 $m = 5$ 이고 $n = \sqrt{\frac{80}{5}} = 4$ 이다.

35. 다음 식이 모두 자연수가 되게 하는 자연수 x 의 최솟값을 구하고 그 자연수 y 를 각각 구하여라.

	자연수 x 의 최솟값	y
$y = \sqrt{270x}$	㉠	㉡
$n = \sqrt{\frac{120}{x}}$	㉢	㉣

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▶ 정답: ㉠= 30

▶ 정답: ㉡= 90

▶ 정답: ㉢= 30

▶ 정답: ㉣= 2

해설

㉠ $270x = 2 \times 3^3 \times 5 \times x$ 이므로 $x = 2 \times 3 \times 5 = 30$ 이다.

㉡ 따라서 $y = \sqrt{270 \times 30} = 90$ 이다.

㉢ $\frac{120}{x} = \frac{2^3 \times 3 \times 5}{x}$ 이므로 $x = 2 \times 3 \times 5 = 30$ 이다.

㉣ 따라서 $y = \sqrt{\frac{120}{30}} = 2$ 이다.

36. $\sqrt{9x} + \sqrt{48y}$ 가 가장 작은 자연수가 되게 하는 자연수 x 와 y 의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $x + y = 4$

해설

$$\sqrt{9x} + \sqrt{48y} = \sqrt{3^2x} + \sqrt{2^4 \times 3 \times y}$$

$$x = 1, y = 3$$

$$\therefore x + y = 4$$

37. a 가 120과 210 사이의 수일 때, $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{3}}$ 가 정수가 되도록 하는 a 를 모두 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 147

▷ 정답 : 192

해설

$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{3}} = b$ (b 는 정수)이므로 $a = 3b^2$ 의 꼴이면 된다. $120 < 3b^2 < 210$
 $40 < b^2 < 70$
 $b = 7, 8$
 $\therefore a = 3 \times 7 \times 7 = 147$ 또는 $a = 3 \times 8 \times 8 = 192$

38. $\sqrt{\frac{32}{3}}x$ 가 자연수가 되기 위한 x 의 값 중 가장 큰 두 자리 자연수를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 96

해설

$$\sqrt{\frac{32}{3}}x = \sqrt{\frac{2^4 \times 2}{3}}x \text{ 이므로 } x = \frac{3}{2} \times k^2$$

$$k = 1 \text{ 일 때, } x = \frac{3}{2}$$

$$k = 2 \text{ 일 때, } x = 6$$

$$k = 3 \text{ 일 때, } x = \frac{27}{2}$$

$$k = 4 \text{ 일 때, } x = 24$$

$$k = 5 \text{ 일 때, } x = \frac{75}{2}$$

$$k = 6 \text{ 일 때, } x = 54$$

$$k = 7 \text{ 일 때, } x = \frac{147}{2}$$

$$k = 8 \text{ 일 때, } x = 96$$

$$k = 9 \text{ 일 때, } x = \frac{243}{2}$$

x 는 가장 큰 두 자리의 자연수이므로 96 이다.

39. $5 < n < 25$ 일 때, $\sqrt{60n}$ 이 정수가 되는 자연수 n 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $n = 15$

해설

$$\sqrt{60n} = \sqrt{2^2 \times 3 \times 5 \times n}$$

$$n = 3 \times 5 \times k^2 \text{ 이므로}$$

$$k = 1 \text{ 일 때, } n = 3 \times 5, n = 3 \times 5 \times 2^2 = 60$$

그런데 $5 < n < 25$ 이므로 $n = 15$ 이다.

40. $2 < \sqrt{a} < 3$ 을 만족하면서 $\sqrt{2a}$ 가 정수가 되게 하는 자연수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $a = 8$

해설

$\sqrt{4} < \sqrt{a} < \sqrt{9}$ 를 만족하는 a 는 5, 6, 7, 8

$\sqrt{2a}$ 가 자연수가 되려면 $a = 8$

$\sqrt{2 \times 8} = \sqrt{16} = 4$

41. n 이 자연수이고, $1 < n < 20$ 일 때, $\sqrt{3n}$ 이 자연수가 되는 n 의 값들의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

$\sqrt{3n}$ 에서 $n = 3 \times k^2$ 이므로 $n = 3, 12$
따라서 n 의 값들의 합은 15 이다.

42. $\sqrt{135 \times a}$ 가 자연수가 되게 하는 a 의 값 중에서 가장 작은 세 자리의 자연수와 가장 큰 세 자리의 자연수의 차를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 825

해설

$$135 = 3^3 \times 5 = 3^2 \times 15$$

$\sqrt{135 \times a}$ 가 자연수가 되려면

$a = 15 \times$ (제곱수) 이어야 한다.

$$15 \times 4 = 60, 15 \times 9 = 135, \dots$$

$$15 \times 49 = 735, 15 \times 64 = 960$$

$$\therefore 960 - 135 = 825$$

43. $\sqrt{1029 \times a}$ 가 자연수가 되게 하는 a 의 값 중에서 가장 작은 세 자리의 자연수와 가장 큰 세 자리의 자연수의 차를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 567

해설

$1029 = 7^3 \times 3 = 7^2 \times 21$
 $\sqrt{1029 \times a}$ 가 자연수가 되려면
 $a = 21 \times (\text{제곱수})$ 이어야 한다.
 $21 \times 4 = 84, 21 \times 9 = 189, \dots$
 $21 \times 25 = 525, 21 \times 36 = 756$
 $\therefore 756 - 189 = 567$