1. 다음 식을 만족하는 *x* 의 값을 구하여라.

$$32^{x-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-4}$$

답:

▷ 정답: 2

 $(2^{5})^{x-2} = (2^{-1})^{2x-4}$ $2^{5x-10} = 2^{-2x+4}$ 5x - 10 = -2x + 4 7x = 14 $\therefore x = 2$

2. $4^{x+2} \div 2^{2x-6} \times 25 \cdot 5^{2x-2} = 16 \times 100^x$ 일 때, x 의 값을 구하여라.

답:

➢ 정답: 3

해설

```
(좌변) = 4^{x+2} \div 2^{2x-6} \times 25 \cdot 5^{2x-2}

= (2^2)^{x+2} \times 2^{6-2x} \times 5^{2+2x-2}

= 2^{2x+4+6-2x} \times 5^{2x}

= 2^{10} \times 5^{2x}

(우변) = 16 \times 100^x = 2^4 \times (2^2 \times 5^2)^x = 2^{4+2x} \times 5^{2x}

마라서 4+2x=10 이므로 x=3 이다.
```

3. $625^{x-1} = 5^{2x} \times 125^6 \div 25^3$ 을 만족하는 정수 x 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 8

해설

 $625 = 25^2 = (5^2)^2 = 5^4$, $125 = 5^3$ 이므로 주어진 식을 밑이 5인 거듭제곱꼴의 형태로 바꾸어 주면 $625^{x-1} = 5^{2x} \times 125^6 \div 25^3$ $(5^4)^{x-1} = 5^{2x} \times (5^3)^6 \times (5^2)^{-3}$ $5^{4x-4} = 5^{2x} \times 5^{18} \times 5^{-6}$ $5^{4x-4} = 5^{2x+12}$ 밑이 5 로 같으므로 양변의 지수가 같다.

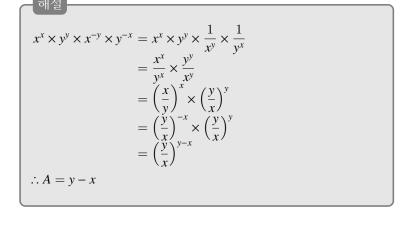
4x - 4 = 2x + 12

 $\therefore x = 8$

4. 모든 양수 x, y 에 대하여 $x^x \times y^y \times x^{-y} \times y^{-x} = \left(\frac{y}{x}\right)^A$ 이 성립할 때, A 를 구하여라. (단, y > x)

답:

▷ 정답: y-x



자연수 n 에 대하여 $f(3^n) = n$ 으로 정의한다. f(x) + f(y) + f(27) =**5.** f(729) 일 때, 서로 다른 자연수 x,y 의 합을 모두 구하여라.

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: 12

➢ 정답: 28

해설

 $f(27) = f(3^3) = 3$, $f(729) = f(3^6) = 6$ 이므로 f(x) + f(y) = 6 - 3 = 3을 만족하는 f(x), f(y)는

f(x) = 0, f(y) = 3 일 때, x = 1, y = 27f(x) = 1, f(y) = 2 일 때, x = 3, y = 9

f(x) = 2, f(y) = 1 일 때, x = 9, y = 3

f(x) = 3, f(y) = 0 일 때, x = 27, y = 1따라서 x + y = 28, x + y = 12 이다.

 $N=3^n$ 일 때, M(N)=n 이라 정의한다. a 는 자연수일 때, $M(3^{2a+1}\div$ 6. 3^{2a}) $= M(3^a)$ 를 만족하는 a 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 1

해설

 $N=3^n$ 이므로 $M(3^n)=n$ 이다. $M(3^{2a+1} \div 3^{2a}) = M(3^a)$

 $M(3^{2a+1-2a}) = M(3^a)$ $M(3) = M(3^a)$

 $\therefore a = 1$

7. 자연수 n 에 대하여 $f(2^n) = n$ 이라 정의하자. 다음 수 중에서 가장 큰 수를 a , 가장 작은 수를 b 이라 할 때, f(f(a)) + f(f(b)) 의 값을 구하여라.

$$(4^2)^2$$
, $(2^2)^{2^2}$, $(2^{2^2})^2$, 2^{4^2} , 4^{2^4}

▶ 답:

▷ 정답: 8

 $(4^2)^2=2^8=2^{2^3},(2^2)^{2^2}=2^{2^3},(2^{2^2})^2=2^{2^3},2^{4^2}=2^{2^4},4^{2^4}=2^{2^5}$ 이<u>므로</u> (가장 큰 수 a) = 2^{2^5} , (가장 작은 수 b) = 2^{2^3} $f(a) = f(2^{2^5}) = 2^5$, $f(b) = f(2^{2^3}) = 2^3$ 이므로

 $\therefore f(f(a)) + f(f(b)) = f(2^5) + f(2^3) = 5 + 3 = 8$

8. 다음 세 수의 크기를 비교하여 큰 순서대로 나열하여라.

 2^{81} , 3^{63} , 5^{36}

답:

▶ 답:

▶ 답:

ightharpoonup 정답: 3^{63}

▷ 정답: 5³⁶

▷ 정답: 2⁸¹

해설

 $81 = 3^4$, $63 = 3^2 \times 7$, $36 = 2^2 \times 3^2$ 이므로

세 수의 최대공약수는 $3^2 = 9$ 이다. 따라서

 $2^{81}, 3^{63}, 5^{36}$

 $(2^9)^9,\ (3^7)^9,\ (5^4)^9$ 에서 $2^9<5^4<3^7$ 이므로 세 수의 크기는 $2^{81}<5^{36}<3^{63}$ $3^{63}, 5^{36}, 2^{81}$

9. $1 \le \left(\frac{n}{4}\right)^{200} \le \left(\frac{27}{16}\right)^{100}$ 을 만족하는 자연수 n 의 값을 모두 구하여라.

▶ 답: ▶ 답:

▷ 정답: 4

▷ 정답: 5

각 항의 지수를 통일하면 $1^{100} \le \left(\frac{n^2}{16}\right)^{100} \le \left(\frac{27}{16}\right)^{100}$ $1 \le \frac{n^2}{16} \le \frac{27}{16}$ $16 \le n^2 \le 27$

따라서 $16 \le n^2 \le 27$ 를 만족하는 자연수 n=4, 5 이다.

10. $3^{2000} \le n^{2000} \le A^{1000}$ 을 만족하는 자연수 n 의 값이 모두 4 개일 때, A 의 최솟값을 구하여라. (단, A 는 자연수)

답:

▷ 정답: 36

각 항의 지수를 통일하면

 $3^{2000} \le n^{2000} \le A^{1000}$ $(3^2)^{1000} \le (n^2)^{1000} \le A^{1000}$

따라서 $3^2 \le n^2 \le A$ 를 만족하는 자연수 n 의 값이 4 개이므로

순서대로 *n* = 3, 4, 5, 6 이다. ∴ 6² ≤ *A* < 7² 에서 *A* 의 최솟값은 36

11. n < m < 10 인 자연수 m, n 에 대하여 $\frac{m^n n^m}{m^m n^n} = \left(\frac{n}{m}\right)^8$ 을 만족하는 m+n 의 값을 구하여라.

답:

▷ 정답: 10

 $\frac{m^n n^m}{m^m n^n} = \frac{n^m}{m^m} \times \frac{m^n}{n^n} = \left(\frac{n}{m}\right)^m \times \left(\frac{m}{n}\right)^n = \left(\frac{n}{m}\right)^m \times \left(\frac{n}{m}\right)^{-n} = \left(\frac{n}{m}\right)^{m-n}$ 따라서 n < m < 10 이고 m - n = 8 을 만족하는 자연수 m, n 은 m = 9, n = 1 이다.

 $m = 9, \ n = 1 \text{ ord.}$ $\therefore m + n = 10$

12. $G(x)=a^{2x}b^x$ 이라 할 때, $G(x)\times G(2x)\times G(3x)=G(Ax)$ 의 A 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 6

해설

 $G(2x) = a^{2 \times 2x} \times b^{2x} = (a^{2x}b^x)^2 = \{G(x)\}^2$ 이코 $G(3x) = a^{2 \times 3x} \times b^{3x} = (a^{2x}b^x)^3 = \{G(x)\}^3$ 이므로 $G(nx) = \{G(x)\}^n$ 이다. $G(x) \times G(2x) \times G(3x) = G(x) \times \{G(x)\}^2 \times \{G(x)\}^3 = \{G(x)\}^6 = G(6x) = G(Ax)$ $\therefore A = 6$

13. 다음 보기의 수 중에서 가장 큰 수를 a , 가장 작은 수를 b 라 할 때, $a=2^m$, $b=2^n$ 이고, $m=2^p$, $n=2^q$ 이다. 이 때, p+q 의 값을 구하여라.

 $\left\{(2^2)^2\right\}^3 \qquad (2^2)^{2^2} \qquad 2^{(2^2)^3} \qquad 2^{2^{2^2}}$

▷ 정답: 9

해설

▶ 답:

 $\left\{ (2^2)^2 \right\}^3 = 2^{12}$

 $(2^2)^{2^2} = 2^{2^3} = 2^8$

 $2^{(2^2)^3} = 2^{2^6} = 2^{64}$ $2^{2^{2^2}} = 2^{2^4} = 2^{16}$

따라서 가장 큰 수 $a=2^{2^6}$, 가장 작은 수 $b=2^{2^3}$ 이므로 $m=2^6, \ n=2^3$

p + q = 6 + 3 = 9

14. $27^{x-2} = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-6}$ 일 때, x의 값을 구하여라.

 답:

 ▷ 정답:
 3

=11 24

 $(3^3)^{x-2} = 3^{-x+6}$ $3x - 6 = -x + 6, \ 4x = 12, \ x = 3$

15. $125^{x+2} = \left(\frac{1}{5}\right)^{2x-11}$ 일 때, x 의 값은?

①1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

(5³) $^{x+2} = 5^{-2x+11}$ 3(x+2) = -2x + 113x+6 = -2x + 11

 $\therefore x = 1$

16. $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1} = 27^{x+2}$ 일 때, x 의 값을 구하여라.

답:

▷ 정답: -1

해설 $3^{-2x+1} = (3^3)^{x+2} = 3^{3x+6}$ -2x+1 = 3x+6 $\therefore x = -1$

17. $4^{4x+2} = 8^{2x+4}$ 일 때, x 의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설 $(2^2)^{4x+2} = (2^3)^{2x+4}$ $2^{8x+4} = 2^{6x+12}$ 8x + 4 = 6x + 12 $\therefore x = 4$

18. 부등식 $5^{100} < x^{200} < 4^{300}$ 을 만족하는 자연수 x의 개수를 구하여라.

<u>개</u>

정답: 5개

 $5^{100} < (x^2)^{100} < (4^3)^{100}$

5 < x² < 4³ 마라서 마조:

따라서 만족하는 자연수는 3, 4, 5, 6, 7로 5개이다.

19. $27^{x-2} = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-6}$ 일 때, x의 값을 구하여라.

▶ 답: ▷ 정답: 3

 $(3^3)^{x-2} = 3^{-x+6}$ 지수: 3x - 6 = -x + 6, 4x = 12, x = 3

20.
$$125^{x+2} = \left(\frac{1}{5}\right)^{2x-11}$$
 일 때, x 의 값은?

①1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

 $(5^3)^{x+2} = 5^{-2x+11}$ $5^{3x+6} = 5^{-2x+11}, 3x+6 = -2x+11, x = 1$

21. $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1} = 27^{x+2}$ 일 때, x 의 값을 구하여라.

답:

▷ 정답: -1

 $3^{-2x+1} = (3^3)^{x+2}$ -2x+1 = 3x+6, x = -1

22. $4^{4x+2} = 8^{2x+4}$ 일 때, x 의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설 $(2^{2})^{4x+2} = (2^{3})^{2x+4}$ $2^{8x+4} = 2^{6x+12}$ 8x + 4 = 6x + 12∴ x = 4

23. $2^{x+4} = 4^{2x-1}$ 이 성립할 때, x 의 값은?

① -1 ② 1 ③ 2 ④ 4 ⑤ 5

 $2^{x+4} = 2^{2(2x-1)}$ x + 4 = 2(2x - 1) 3x = 6 $\therefore x = 2$

24. $\frac{9^{2x-3}}{3^{x+2}} = 81$ 일 때, x의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 4

 $\frac{9^{2x-3}}{3^{x+2}} = \frac{3^{4x-6}}{3^{x+2}} = 3^{3x-8} = 81 = 3^4$ $\therefore 3x - 8 = 4, \quad x = 4$ **25.** 다음 식을 만족하는 x의 값을 구하여라.

 $243^6 \div 27^x = 3^3$

답:

▷ 정답: 9

해설

 $243^6 \div 27^x = 3^3$ $(3^5)^6 \div 3^{3x} = 3^3$

 $3^{30-3x} = 3^3$ $\therefore x = 9$

26. $128^{2a-1} \div 16^{a+2} = 8^{3a-4}$ 를 만족하는 a 의 값을 구하여라.

▶ 답:

➢ 정답: 3

 $(2^7)^{2a-1} \div (2^4)^{a+2} = (2^3)^{3a-4}$ 7(2a-1) - 4(a+2) = 3(3a-4)14a - 7 - 4a - 8 = 9a - 1210a - 9a = -12 + 15 $\therefore a = 3$

27. $16^5 \le x^{30} \le 32^8$ 을 만족하는 자연수 x 를 구하여라.

답:

▷ 정답: 2

해설

 $16^5 \le x^{30} \le 32^8$

 $\begin{vmatrix} (2^4)^5 \le x^{30} \le (2^5)^8 \\ 2^{20} \le x^{30} \le 2^{40} \end{vmatrix}$

 $(2^2)^{10} \le (x^3)^{10} \le (2^4)^{10}$ 따라서 $2^2 \le x^3 \le 2^4$ 을 만족하는 자연수는 2 이다.

28. 부등식 $3^{10} < x^{10} < 4^{20}$ 을 만족하는 자연수 x 의 개수를 구하여라.

▶ 답: <u>개</u> ▷ 정답: 12<u>개</u>

 $3^{10} < x^{10} < (4^2)^{10}$

 $3 < x < 4^2$ 따라서 만족하는 자연수는 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15

로 12 개이다.

29. $3^{2x+1} = 27^{x-2}$ 이 성립할 때, x 의 값을 구하여라.

답:

▷ 정답: 7

해설

 $3^{2x+1} = (3^3)^{x-2}, \ 2x+1 = 3(x-2)$ $\therefore x = 7$ **30.** $2^{x+2} + 2^x = 160$ 일 때, x 의 값을 구하여라.

▶ 답:

➢ 정답: 5

해설

 $2^{x+2} + 2^x = 5 \times 2^x = 160$ $2^x = 32 = 2^5$

 $\therefore x = 5$

31. $3^{2x+1} + 9^x = 324$ 일 때, x 의 값을 구하여라.

 답:

 ▷ 정답:
 2

 $3^{2x+1} + 3^{2x} = 3 \cdot 3^{2x} + 3^{2x} = 4 \cdot 3^{2x} = 324$ $3^{2x} = 81$

 $\therefore x = 2$

해설

32. $3^{2x+4} \times 9^{3-x} \times 4^x = 81 \times 6^{2x}$ 일 때, x 의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 **4**3 ⑤ 4

 $3^{2x+4} \times 9^{3-x} \times 4^x = 3^{2x+4} \times (3^2)^{3-x} \times (2^2)^x$ $= 3^{2x+4} \times 3^{6-2x} \times 2^{2x}$ $=3^{10}\times 2^{2x}$ $81 \times 6^{2x} = 3^4 \times 2^{2x} \times 3^{2x}$ $=3^{4+2x}\times 2^{2x}$

4+2x=10 이므로 x=3 이다.