1. 부등식 $ax-b^2 > bx+a^2-8$의 해가 모든 실수이기 위한 a 의 조건은? (a, b는 실수)

① $a=b$이고 $-1 < a < 1$

② $a=b$이고 $-2 < a < 2$

③ $a=b$이고 $-3 < a < 3$

④ $a=b$이고 $-4 < a < 4$

⑤ $a=b$이고 $-5 < a < 5$

해설

$ax-b^2 > bx+a^2-8$에서

$(a-b)x-b^2-a^2+8 > 0$이 모든 x에 대해서 성립해야 하므로

$a=b$

$\therefore -2a^2+8 > 0 \quad 2a^2 < 8$

$\therefore a^2 < 4$ 이므로 $-2 < a < 2$

즉 $a=b$ 이고 $-2 < a < 2$

2. $-2 \le x \le -1$ 일 때, $A = \dfrac{12}{2-x}$ 가 취하는 값의 범위를 구하면 $p \le A \le q$ 이다. 이 때, pq 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$-2 \le x \le -1$ 의 각 변에 -1 을 곱하면

$1 \le -x \le 2$

다시 각 변에 2를 더하면 $3 \le 2-x \le 4$

각 변의 역수를 취하면 $\dfrac{1}{4} \le \dfrac{1}{2-x} \le \dfrac{1}{3}$

각 변에 12 를 곱하면 $3 \le \dfrac{12}{2-x} \le 4$

$\therefore p = 3, q = 4$

$\therefore pq = 12$

3. 다음 두 일차부등식을 만족하는 정수는 모두 몇 개인지 구하여라.

$$\frac{x-2}{3}+1 \le -\frac{x}{3}+\frac{3}{2}, \quad 0.2-0.1x > 1-0.5x$$

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 0 개

해설

$\frac{x-2}{3}+1 \le -\frac{x}{3}+\frac{3}{2}$

양변에 6 을 곱하면

$2(x-2)+6 \le -2x+9$

$4x \le 9-2$

$x \le \frac{7}{4}$

$0.2-0.1x > 1-0.5x$

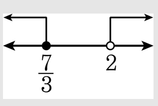
양변에 10 을 곱하면

$2-x > 10-5x$

$-x+5x > 10-2$

$4x > 8$

$x > 2$



∴ 해가 없다.

4. 연립부등식

$$\begin{cases} x+7>2a \\ 2x-3<1 \end{cases}$$

의 해가 $-1<x<2$일 때, 상수 a의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

$x+7>2a$에서 $x>2a-7$

$2x-3<1$에서 $x<2$

$2a-7<x<2$

$\therefore\ 2a-7=-1$

$\therefore\ a=3$

5. 부등식 $|4x-2|<6$의 해와 부등식$ax^2+2x+b>0$의 해가 서로 같을 때, 상수 a, b의 합 $a+b$의 값은?

① -2　② 0　③ 1　④ 2　⑤ 4

해설

$|4x-2|<6$, $-6<4x-2<6$

$\therefore\ -1<x<2$

$(x+1)(x-2)<0 \Leftrightarrow ax^2+2x+b>0$

$x^2-x-2<0 \Leftrightarrow x^2+\frac{2}{a}x+\frac{b}{a}<0$

$\frac{2}{a}=-1, \frac{b}{a}=-2$

$a=-2, b=4$

$\therefore\ a+b=-2+4=2$

6. 평지의 공원에 둘레의 길이는 200 m로 일정하고 넓이는 900 m^2 이상인 직사각형 모양의 화단을 만들려고 한다. 이 때, 만들어지는 화단의 가로의 최대 길이는?

① 40 m　　② 50 m　　③ 90 m
④ 100 m　　⑤ 150 m

해설

화단의 가로 길이를 x m 라고 하면
세로의 길이는 $(100-x)$ m 이다.
가로, 세로의 길이는 모두 양수이므로
$x > 0,\ 100-x > 0$ 에서 $0 < x < 100 \cdots$ ㈎
900 m^2 이상이므로
$x(100-x) \geq 900$
$x^2 - 100x + 900 \leq 0, (x-10)(x-90) \leq 0$
$\therefore 10 \leq x \leq 90$
이것은 ㈎를 만족하므로
가로의 최대 길이는 90 m 이다.

7. 이차함수 $y=x^2-2x-3$ 의 그래프가 이차함수 $y=2x^2-2mx+1$ 의 그래프보다 항상 아래쪽에 존재하도록 하는 실수 m 의 값의 범위는?

① $-3<m<3$　② $-3\ m<1$

③ $-1<m<3$　④ $m<-1$또는$m>1$

⑤ $m<-1$또는$m>3$

해설

$x^2-2x-3<2x^2-2mx+1$ 에서
$x^2-2(m-1)x+4>0$
이 부등식이 모든 실수 x 에 대하여 항상 성립해야 하므로 이차 방정식 $x^2-2(m-1)x+4=0$ 의 판별식을 D 라 하면
$\frac{D}{4}=(m-1)^2-4<0$ 에서
$(m+1)(m-3)<0$
$\therefore -1<m<3$

8. 세 변의 길이가 $x-1,\ x,\ x+1$인 삼각형이 둔각삼각형이 되도록 하는 x의 값의 범위가 $a < x < b$라 할 때, $a+b$의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$x-1,\ x,\ x+1$은 삼각형의 세 변이므로

$x-1>0$, $x>0$, $x+1>0$

$x-1+x>x+1 \therefore x>2 \cdots\cdots$①

한편, 둔각삼각형이 되려면 $(x-1)^2+x^2<(x+1)^2$

$x^2-4x<0$에서 $0<x<4 \quad \cdots\cdots$②

①과 ②에서 $2<x<4$

$\therefore\ a=2,\ b=4$

따라서 $a+b=6$

9. 이차방정식 $x^2-2mx+m+6=0$의 두 근이 모두 1보다 작을 때, 실수 m의 값의 범위를 구하면?

① $m \le -6$ ② $m \le -4$ ③ $m \le -2$

④ $m \le 0$ ⑤ $m \le 2$

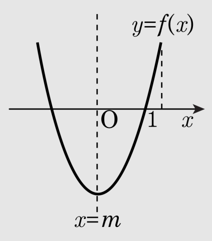
해설

$f(x)=x^2-2mx+m+6=(x-m)^2-m^2+m+6$으로 놓으면

$\frac{D}{4}=m^2-1\cdot(m+6)=m^2-m-6$

$f(1)=1-2m+m+6=-m+7$

두 근이 모두 1보다 작으려면 $y=f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같아야 한다.



따라서,

(i) 판별식 : $\frac{D}{4}=m^2-m-6 \ge 0$

$(m+2)(m-3) \ge 0$

$\therefore m \le -2$ 또는 $m \ge 3$ …… ㉠

(ii) 경계값의 부호 : $f(1)=-m+7>0$

$\therefore m<7$ …… ㉡

(iii) 축 : $m<1$ …… ㉢

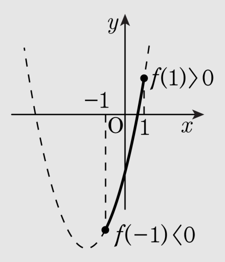
㉠, ㉡, ㉢으로부터 구하는 m의 값의 범위는 $m \le -2$

10. 이차방정식 $x^2 + 4mx - 3m = 0$의 한 근은 -1과 1사이에 있고, 또 한 근은 -1보다 작도록 하는 실수 m의 범위를 구하면?

① $m > \frac{2}{9}$　② $m > \frac{1}{7}$　③ $m > -\frac{1}{3}$
④ $m < -\frac{1}{3}$　⑤ $m < \frac{2}{9}$

해설

$f(x) = x^2 + 4mx - 3m$으로 놓을 때,
$f(x) = 0$의 근이 한 근은 -1과 1사이에 있고, 또 한 근은 -1보다 작아야 하므로



$f(-1) = 1 - 4m - 3m < 0 \Rightarrow m > \frac{1}{7}$

$f(1) = 1 + 4m - 3m > 0 \Rightarrow m > -1$

$\therefore\ m > \frac{1}{7}$

11. 15% 의 소금물 200g 이 있을 때, 물 xg 을 증발시켜서 30% 이상 60% 이하의 소금물을 만들려고 한다. x 의 범위를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $100 \le x \le 150$

해설

15% 의 소금물 200g 의 소금의 양은 $\frac{15}{100} \times 200 = 30(\text{g})$ 이다.

따라서 물 xg 을 뺏을 때의 농도를 나타내면 $\frac{30}{200-x} \times 100$ 이다.

이 값이 30% 이상 60% 이하 이므로, $30 \le \frac{30}{200-x} \times 100 \le 60$ 이고,

이를 연립방정식으로 나타내면 $\begin{cases} 30 \le \frac{30}{200-x} \times 100 \\ \frac{30}{200-x} \times 100 \le 60 \end{cases}$ 이다.

간단히 나타내면 $\begin{cases} x \ge 100 \\ x \le 150 \end{cases}$ 이다.

따라서 증발시켜야 하는 물의 양 x 의 범위는 $100 \le x \le 150$ 이다.

12. $6[x]^2-31[x-1]-13<0$을 풀면? (단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대의 정수)

① $-3 \le x < 3$　② $-2 \le x < 5$　③ $0 \le x < 3$
④ $1 \le x < 5$　⑤ $1 \le x < 6$

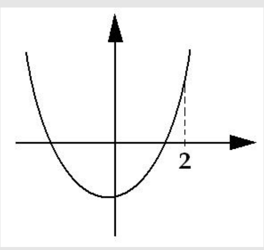
해설
$n \le [x] < n+1$에서
$n-1 < [x-1] < n$이므로
$[x-1]=[x]-1$
$\therefore 6[x]^2-31[x-1]-13$
$=6[x]^2-31([x]-1)-13$
$=6[x]^2-31[x]+18<0$
$\therefore (2[x]-9)(3[x]-2)<0$
$\dfrac{2}{3}<[x]<\dfrac{9}{2}$
$\therefore 1 \le [x] \le 4$이므로
$[x]=1,\ 2,\ 3,\ 4$
$\therefore 1 \le x < 5$

13. $x > 2$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $x^2 - 2kx + k - 1 > 0$ 을 성립하게 하는 실수 k 의 최댓값은?

① -1　② 0　③ 1　④ 2　⑤ 3

해설

$D/4 = k^2 - k + 1 > 0$ 이므로 서로 다른 두 실근을 가진다.



문제의 조건을 만족하기 위해서는 대칭축이 2보다 왼쪽에 있어야 하고 $f(2) \geq 0$ 의 두 조건을 모두 만족해야 한다.
대칭축 조건에서 $k < 2$ ······㉠
$f(2) = 3 - 3k \geq 0$ 에서 $k \leq 1$ ······㉡
㉠, ㉡에서 $k \leq 1$
k 의 최댓값은 1 이다.

14. 두 부등식 $x^2+2x-15>0$, $x^2-x+k\le 0$에 대하여 두 부등식 중 적어도 하나를 만족하는 x의 값은 실수 전체이고, 두 부등식을 동시에 만족하는 x의 값은 $3<x\le 6$일 때, 상수 k 의 값은?

① -48 ② -30 ③ -18 ④ 12 ⑤ 24

해설

부등식 $x^2+2x-15>0$ 에서
$(x+5)(x-3)>0$, $x>3$ 또는 $x<-5$
부등식 $x^2-x+k\le 0$ 에 대하여
두 부등식의 공통범위가 $3<x\le 6$ 이므로
$x^2-x+k\le 0$ 를 만족하는 범위는
$-5\le x\le 6$ $(x-6)(x+5)\le 0$
$x^2-x-30\le 0$
$\therefore k=-30$

15. 이차방정식 $x^2-2x+k=0$ 의 두 근이 각각 0 과 1 및 1과 2사이에 있도록 k 값의 범위를 구하면?

① $k<0$, $k>1$ ② $k \le 0$, $k \ge 2$ ③ $0<k<1$
④ $0 \le k \le 1$ ⑤ $0<k<2$

해설
$x^2-2x+k=f(x)$ 라 하면
$f(0)>0, f(1)<0, f(2)>0$
$\therefore k>0, k<1$
$\therefore 0<k<1$