1. 다항식 $x^3 + ax + b$가 다항식 $x^2 - x + 1$로 나누어 떨어지도록 상수 $a + b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

나누어 떨어지려면 나머지가 0이어야 하므로

$x^2 = x - 1$을 대입하면

$ax + (b - 1) = 0$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로,

$a = 0,\ b - 1 = 0$

$\therefore\ a = 0,\ b = 1$

$\therefore a + b = 1$

해설

$x^3 + ax + b$

$= (x^2 - x + 1)Q(x)$

$= (x^2 - x + 1)(x + b)$

$\therefore\ b = 1,\ a = 0$

2. 다항식 $2x^3+ax^2+bx+3$ 이 다항식 $2x^2-x-3$ 으로 나누어 떨어질 때, $a+b$ 의 값은?

① 3 ② 1 ③ -1 ④ -2 ⑤ -5

해설

$$2x^3+ax^2+bx+3=(2x^2-x-3)Q(x)$$
$$=(x+1)(2x-3)Q(x)$$

$x=-1$ 일 때, $-2+a-b+3=0$

$\therefore\ a-b=-1\cdots$ ㉠

$x=\dfrac{3}{2}$ 일 때, $\dfrac{27}{4}+\dfrac{9}{4}a+\dfrac{3}{2}b+3=0$

$27+9a+6b+12=0$

$\therefore\ 3a+2b=-13\cdots$ ㉡

㉠, ㉡ 에서 $a=-3,\ b=-2$

$\therefore\ a+b=(-3)+(-2)=-5$

3. 복소수 z의 켤레복소수 $\bar{z}$라 할 때 $(1+2i)z+3(2-\bar{z})=0$을 만족하는 복소수 z를 구하면?

① $z=2-3i$ ② $z=4-3i$ ③ $z=6-3i$

④ $z=2+3i$ ⑤ $z=4+3i$

해설

$z=a+bi, \bar{z}=a-bi$라 하면

$$(\text{준식}) = (1+2i)(a+bi)+3(2-a+bi)$$
$$= (6-2a-2b)+(2a+4b)i$$

$\therefore 6-2a-2b=0, 2a+4b=0$

$\therefore a=6, b=-3$

$\therefore z=6-3i$

4. 실수 x에 대하여, $\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-2}} = -\sqrt{\dfrac{x+1}{x-2}}$ 이 성립할 때, $|x+1|+|x-2|$의 값을 구하면? (단, $(x+1)(x-2) \neq 0$)

① $2x-1$ ② $-2x+1$ ③ 3

④ -3 ⑤ $x+1$

해설

$\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = -\sqrt{\dfrac{b}{a}}$ 을 만족하려면,

$a<0,\quad b \geq 0$ 이다.

따라서 $x+1 \geq 0,\ x-2<0,\ -1 \leq x<2,\ x \neq -1,\ x \neq 2$

$\therefore\ -1<x<2$

$\therefore |x+1|+|x-2| = x+1-x+2=3$

5. x에 관한 3차식 $x^3+px^2-q^2$, $x^3-(3q-p)x+2(q-1)$의 최대공약수가 $x-1$일 때, pq의 값을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$f(x)=x^3+px^2-q^2$,
$q(x)=x^3-(3q-p)x+2(q-1)$라 놓으면
최대공약수가 $x-1$이므로
$f(1)=1+p-q^2=0\cdots$㉠
$g(1)=1-(3q-p)+2(q-1)=0$에서
$p-q-1=0\cdots$㉡
㉠, ㉡에서 $q^2-q-2=0$, $(q-2)(q+1)=0$
(i) $q=2$일 때, ㉡ $p=3$
$f(x)=(x-1)(x+2)^2$, $g(x)=(x-1)^2(x+2)$
$\therefore$ $G.C.D$가 $x-1$이라는 것에 모순
(ii) $q=-1$일 때, ㉡ $p=0$
$f(x)=(x-1)(x^2+x+1)$,
$g(x)=(x-1)(x^2+x+4)$
$\therefore$ $G.C.D$는 $x-1$
$\therefore$ $pq=0$

6. 계수가 유리수인 이차방정식 $x^2 + px + q = 0$ 의 한 근이 $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

$\sqrt{7-4\sqrt{3}} = \sqrt{7-2\sqrt{12}} = 2-\sqrt{3}$ 이므로,

두 근은 $2-\sqrt{3}$, $2+\sqrt{3}$

$p = -$(두근의 합) $= -4$

$q =$ (두근의 곱) $= 1$

$\therefore p+q = -3$

7. 이차함수 $y = x^2 + 2ax + b$ 가 $x = 3$ 에서 최솟값 -10 을 가질 때 $a,\ b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = -3$

▷ 정답 : $b = -1$

해설

$x = 3$ 일 때, 최솟값 -10 을 가지므로 꼭짓점의 좌표는 $(3,\ -10)$ 이다.

$$
\begin{aligned}
y &= x^2 + 2ax + b \\
&= (x-3)^2 - 10 \\
&= x^2 - 6x - 1
\end{aligned}
$$

$\therefore a = -3, b = -1$

8. 삼차방정식 $x^3+mx+n=0$이 중근 α와 또 다른 실근을 가질 때, n을 α를 써서 나타내면?

① α^2 ② α^3 ③ $2\alpha^3$ ④ α^4 ⑤ $2\alpha^4$

해설

$x^3+mx+n=(x-\alpha)^2(x+\beta)$
$=(x^2-2\alpha x+\alpha^2)(x+\beta)$
$=x^3+(\beta-2\alpha)x^2+(\alpha^2-2\alpha\beta)x+\alpha^2\beta$
$=\beta-2\alpha=0$

즉, $\beta=2\alpha$이므로 $n=2\alpha^3$

9. 삼차방정식 $x^3-4x^2+x+k=0$의 한 근이 -1일 때, k의 값과 나머지 두 근의 합은?

① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

해설

$x=-1$을 대입하면

$(-1)^3-4-1+k=0 \quad \therefore k=6$

$x^3-4x^2+x+6=0$의 나머지 두 근을 α, β라 하면

세 근의 합 $4=-1+\alpha+\beta$에서 $\alpha+\beta=5$

$\therefore k+\alpha+\beta=11$

10. 다음 연립방정식의 모든 해의 합을 구하여라.

$$\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ xy=12 \end{cases}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x+y=u$, $xy=v$ 로 놓으면 주어진 연립방정식은

$$\begin{cases} u^2-2v=25 \\ v=12 \end{cases}$$

$\therefore\ u=\pm 7,\ v=12$

따라서, 주어진 연립방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{cases} x+y=7 & \cdots ㄷ \\ xy=12 & \cdots ㄴ \end{cases}$$

또는 $\begin{cases} x+y=-7 & \cdots ㄹ \\ xy=12 & \cdots ㄴ \end{cases}$

(i) ㄷ, ㄴ에서 $x,\ y$ 는 이차방정식 $t^2-7t+12=0$ 의 두 근이므로 $x=3,\ y=4$ 또는 $x=4,\ y=3$

(ii) ㄹ, ㄴ에서 $x,\ y$ 는 이차방정식 $t^2+7t+12=0$ 의 두 근이므로 $x=-3,\ y=-4$ 또는 $x=-4,\ y=-3$

(i), (ii) 로부터 구하는 모든 해의 합은 0

11. $2^{16}-1$은 1과 10사이의 어떤 두 수로 나누어떨어진다. 이 때, 이 두 수의 합은?

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

해설

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ 임을 이용하여 $2^{16}-1$을 인수분해하면

$2^{16}-1=(2^8)^2-1^2$

$=(2^8+1)(2^8-1)$

$=(2^8+1)(2^4+1)(2^4-1)$

$=(2^8+1)(2^4+1)(2^2+1)(2^2-1)$

$=(2^8+1)(2^4+1)(2^2+1)(2+1)(2-1)$

$=257\cdot17\cdot5\cdot3$

따라서 $2^{16}-1$을 나누었을 때 나누어 떨어지는 1과 10사이의 수

즉, 인수는 3과 5이고 이 두 수의 합은 8이다.

12. $x+\frac{1}{x}=3$ 일 때, $x^2+\frac{1}{x^2}$ 의 값과 $x^3+\frac{1}{x^3}$ 의 값을 차례대로 구하면? (단, $x>0$)

① 5, 6　　② 7, 18　　③ 8, 16

④ 9, 18　　⑤ 10, 27

해설

$x+\frac{1}{x}=3$ 일 때

$$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=3^2-2=7$$

$$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)=27-9=18$$

13. 이차함수 $y=x^2-2ax+4a-4$의 최솟값을 m이라 할 때, m의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$y=x^2-2ax+4a-4=(x-a)^2-a^2+4a-4$
이므로 $x=a$일 때 최솟값 $-a^2+4a-4$를 가진다.
$\therefore m=-a^2+4a-4=-(a-2)^2$
따라서 m은 $a=2$일 때 최댓값 0을 가진다.

14. 부등식 $[x-1]^2+3[x]-3<0$의 해는? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① $-2 \le x < 1$ ② $-2 \le x < 0$ ③ $-1 \le x < 1$

④ $-1 \le x < 0$ ⑤ $0 \le x < 2$

해설

$x-1=A$라 하면 $x=A+1$

$\therefore [A]^2+3[A+1]-3=[A]^2+3[A]+3-3<0$

$[A]([A]+3)<0 \quad \therefore -3<[A]<0$

$-2 \le A < 0 \quad \therefore -2 \leqq x-1 < 0$이므로

$-1 \le x < 1$

15. 두 다항식 x^3+ax^2+bx+1과 x^3+bx^2+ax+1의 최대공약수가 일차식일 때, $a+b$의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$A(x)=x^3+ax^2+bx+1$, $B(x)=x^3+bx^2+ax+1$로 놓으면

$A(x)-B(x)$

$=(x^3+ax^2+bx+1)-(x^3+bx^2+ax+1)$

$=(a-b)x(x-1)$

$A(x)$, $B(x)$의 최고차항의 계수가 1 이므로 최대공약수는 x 이거나 $x-1$ 이 될 수 있지만 두 다항식의 상수항이 1이므로 최대공약수는 $x-1$ 이다.

따라서 다항식 $A(x)$ 는 $x-1$ 을 인수로 가지므로 나머지정리에 의하여

$A(1)=1+a+b+1=0$

$\therefore\ a+b=-2$