

1. $24 \times a = 90 \times b = c^2$ 을 만족하는 가장 작은 자연수 c 의 값을 구하여라.
(단, a, b, c 는 모두 자연수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 60

해설

$$24 \times a = 90 \times b = c^2$$

$24 \times a$ 와 $90 \times b$ 가 어떤 수의 제곱수가 되어야 하므로 소인수분해를 해 보면

$$2^3 \times 3 \times a = 2 \times 3^2 \times 5 \times b$$

즉, c 는 24 과 90 의 공배수이므로 $2^3 \times 3^2 \times 5$ 의 배수이다.

그러므로 가장 작은 c^2 은 $2^4 \times 3^2 \times 5^2$ 이어야 한다.

$$\therefore c = 2^2 \times 3 \times 5 = 60$$

2. 135 에 가장 작은 수를 곱하여 어떤 자연수의 제곱이 되게 하려고 한다. 어떤 수를 곱하면 되는가?

① 6 ② 10 ③ 12 ④ 15 ⑤ 18

해설

$$135 = 3^3 \times 5$$

곱해야 할 가장 작은 자연수는 $3 \times 5 = 15$

3. 자연수 a, b 에 대하여 $2^2 \times 5 \times a = b^2$ 을 만족하는 b 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$2^2 \times 5 \times a = b^2$ 을 만족하려면 $2^2 \times 5 \times a$ 를 소인수분해했을 때 각 소인수의 지수가 짝수여야 한다. 따라서 만족하는 자연수 b 의 최솟값은 $a = 5$ 일 때 $2 \times 5 = 10$ 이다.

4. 12 에 가능한 한 작은 자연수 a 를 곱하여 어떤 자연수 b 의 제곱이 되도록 할 때, a, b 의 값을 각각 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 3$

▷ 정답 : $b = 6$

해설

$$12 \times a = b^2 \text{ 에서}$$

$$12 = 2^2 \times 3$$

$$a = 3$$

$$2^2 \times 3 \times 3 = b^2$$

$$2^2 \times 3^2 = b^2$$

$$b = 2 \times 3 = 6$$

5. $96 \times m = n^2$ 을 만족하는 가장 작은 자연수 m, n 에 대하여 $m + n$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 30

해설

$$96 = 2^5 \times 3 \text{ 이므로 } m = 2 \times 3$$

$$2^5 \times 3 \times (2 \times 3) = 2^6 \times 3^2, n = 2^3 \times 3 = 24$$

$$m = 6, n = 24$$

$$\therefore m + n = 30$$

6. $240 \times a = b^2$ 을 만족하는 가장 작은 자연수 a, b 에 대하여 $b - a$ 의 값은?

① 45 ② 60 ③ 75 ④ 90 ⑤ 105

해설

$240 = 2^4 \times 3 \times 5$ 이므로 $a = 3 \times 5$

$2^4 \times 3 \times 5 \times (3 \times 5) = 2^4 \times 3^2 \times 5^2$, $b = 2^2 \times 3 \times 5 = 60$

$a = 15$, $b = 60$

$\therefore b - a = 45$

7. $\frac{140}{x} = y^2$ 을 만족할 때, $x + y$ 의 최솟값을 구하여라. (단, x, y 는 자연수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 37

해설

$$\frac{140}{x} = y^2 \text{ 에서}$$

$$140 = 2^2 \times 5 \times 7$$

$$x = 5 \times 7$$

$$2^2 = y^2$$

$$2 = y$$

$$\therefore x + y = 35 + 2 = 37$$

8. $2^3 \times 3^2 \times 5$ 에 어떤 자연수를 곱하여 자연수의 제곱이 되게 하려고 할 때, 곱할 수 있는 수 중에서 가장 작은 자연수는?

① 3 ② 5 ③ 3×5 ④ 5^2 ⑤ 10

해설

$$2^3 \times 3^2 \times 5$$

곱해야할 가장 작은 자연수는

$$2 \times 5 = 10$$

9. 720 을 자연수로 나누어 어떤 자연수의 제곱이 되도록 할 때, 나눌 수 있는 가장 작은 자연수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$720 = 2^4 \times 3^2 \times 5$ 이므로
나눌 수 있는 가장 작은 자연수는 5이다.

10. 288 을 어떤 수 x 로 나누어 자연수의 제곱이 되게 하려고 할 때, 가장 작은 자연수 x 를 구하면?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 6 ⑤ 8

해설

$288 = 2^5 \times 3^2$
가장 작은 자연수 x 는 2이다.

11. 자연수 a, b, c 에 대하여 $750a = 180b = c^2$ 이 성립할 때, c 의 최소값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 150

해설

$$750a = 2 \times 3 \times 5^3 \times a, 180b = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times b,$$

위 두 식이 가장 작은 c^2 의 형태가 되려면,

$$a = 2 \times 3 \times 5, b = 5^3 \text{ 이어야 한다.}$$

따라서,

$$c^2 = 2^2 \times 3^2 \times 5^4$$

$$\therefore c = 150$$

12. 120 에 가능한 한 작은 자연수 a 를 곱하여 어떤 자연수 b 의 제곱이 되도록 할 때, a, b 의 값을 각각 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 30$

▷ 정답 : $b = 60$

해설

$120 = 2^3 \times 3 \times 5$ 이므로 곱할 수 있는 수는
 $2 \times 3 \times 5 \times (\text{자연수})^2$ 의 꼴이다.
 $\therefore a = 2 \times 3 \times 5 \times 1^2 = 30$
 $120 \times a = 2^3 \times 3 \times 5 \times 2 \times 3 \times 5$
 $= 2^4 \times 3^2 \times 5^2$
 $= (2^2 \times 3 \times 5)^2$
 $= b^2$
 $\therefore b = 60$

13. 72에 가장 작은 자연수 a 를 곱하여 어떤 자연수 b 의 제곱이 되도록 할 때, a, b 의 값을 각각 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 2$

▷ 정답 : $b = 12$

해설

$$72 \times a = b^2 \text{ 에서}$$

$$72 = 2^3 \times 3^2$$

$$a = 2$$

$$2^3 \times 3^2 \times 2 = b^2$$

$$2^4 \times 3^2 = b^2$$

$$b = 2^2 \times 3 = 12$$

14. 24에 가장 작은 자연수 a 를 곱하여 어떤 자연수 b 의 제곱이 되도록 할 때, $a + b$ 의 값은?

① 2

② 6

③ 9

④ 12

⑤ 18

해설

$$24 \times a = b^2$$

$$2^3 \times 3 \times a = b^2$$

$$a = 2 \times 3 = 6$$

$$2^3 \times 3 \times 2 \times 3 = 2^4 \times 3^2 = b^2$$

$$b = 2^2 \times 3 = 12$$

$$\therefore a + b = 18$$

15. 60 에 가장 작은 수 A 를 곱하여 어떤 자연수 B 의 제곱이 되게 하려고 한다. $A + B$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 45

해설

$$60 \times A = B^2$$

$$60 = 2^2 \times 3 \times 5 \text{ 이므로 } A = 3 \times 5 = 15$$

$$2^2 \times 3 \times 5 \times 3 \times 5 = 2^2 \times 3^2 \times 5^2 = B^2$$

$$B = 2 \times 3 \times 5 = 30$$

$$\therefore A + B = 45$$

16. $48 \times x = y^2$ 을 만족하는 가장 작은 자연수 x, y 에 대하여 $\frac{x}{y}$ 의 값은?

① 3

② 4

③ $\frac{2}{3}$

④ $\frac{1}{3}$

⑤ $\frac{1}{4}$

해설

$$2^4 \times 3 \times x = y^2$$

가장 작은 $x = 3$,

$$2^4 \times 3 \times 3 = 2^4 \times 3^2 = y^2$$

$$y = 2^2 \times 3 = 12$$

$$\frac{x}{y} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

17. $63 \times a = b^2$ 을 만족하는 가장 작은 자연수 a, b 에 대하여 $\frac{b^2}{a^2}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$$3^2 \times 7 \times a = b^2$$

가장 작은 $a = 7$,

$$3^2 \times 7 \times 7 = 3^2 \times 7^2 = b^2$$

$$b = 3 \times 7 = 21$$

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{3^2 \times 7^2}{7^2} = 9$$

18. 300 을 가장 작은 자연수 a 로 나누어 어떤 자연수 b 의 제곱이 되도록 할 때, $a + b$ 의 값을 구하여라

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

$$300 \div a = b^2 \text{ 에서}$$

$$300 = 2^2 \times 3 \times 5^2$$

$$a = 3$$

$$2^2 \times 3 \times 5^2 \div 3 = b^2$$

$$2^2 \times 5^2 = b^2$$

$$b = 2 \times 5 = 10$$

$$\therefore a + b = 13$$

19. 1200 을 가장 작은 자연수 a 로 나누어 어떤 자연수 b 의 제곱이 되도록 할 때, $b - a^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 11

해설

$$1200 \div a = b^2 \text{ 에서}$$

$$1200 = 2^4 \times 3 \times 5^2$$

$$a = 3$$

$$2^4 \times 3 \times 5^2 \div 3 = b^2$$

$$2^4 \times 5^2 = b^2$$

$$b = 2^2 \times 5 = 20$$

$$b - a^2 = 20 - 3^2 = 11$$

20. $28 \times x = \frac{588}{y} = z^2$ 을 만족하는 자연수 z 의 값을 구하여라. (단, a, b, c 는 모두 자연수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$$28 \times x = \frac{588}{y} = z^2$$

$28 \times x$ 와 $\frac{588}{y}$ 가 어떤 수의 제곱수가 되어야 하므로 소인수분해를 해 보면

$$2^2 \times 7 \times x = \frac{2^2 \times 3 \times 7^2}{y} \text{ 에서}$$

$$2^2 \times 7 \times x = z^2 \text{ 을 만족하는 } x \text{ 는 } 7, 7 \times 2^2, 7 \times 3^2, 7 \times 4^2, \dots$$

이고

$$\text{이에 따른 } z^2 \text{ 의 값은 } 2^2 \times 7^2, 2^4 \times 7^2, 2^2 \times 3^2 \times 7^2, 2^6 \times 7^2, \dots$$

이다.

$$\frac{2^2 \times 3 \times 7^2}{y} = z^2 \text{ 을 만족하는 } y \text{ 는 } 3, 2^2 \times 3, 3 \times 7^2, 2^2 \times 3 \times 7^2$$

이고

$$\text{이에 따른 } z^2 \text{ 의 값은 } 2^2 \times 7^2, 7^2, 2^2, 1 \text{ 이다.}$$

따라서 두 식을 동시에 만족하는 값은

$$x = 7, y = 3, z = 14 \text{ 이다.}$$

21. 108 에 가장 작은 자연수를 곱하여 어떤 자연수의 제곱이 되게 하려고 한다. 어떤 수를 곱하면 되는가?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$108 = 2^2 \times 3^3$ 이므로 곱해야할 가장 작은 자연수는 3

22. 72를 x 로 나누어 어떤 자연수의 제곱이 되면서 3의 배수는 되지 않도록 할 때, 나눌 수 있는 가장 작은 자연수 x 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 18

해설

$$72 = 2^3 \times 3^2$$

$\frac{72}{x} = \frac{2^3 \times 3^2}{x}$ 이 어떤 자연수의 제곱이 되는 $x = 2, x = 2 \times 3^2, x = 2^3, x = 2^3 \times 3^2$ 이다.

3의 배수가 되지 않아야 하므로 $x = 2 \times 3^2, x = 2^3 \times 3^2$ 중 작은 자연수는 $x = 2 \times 3^2 = 18$ 이다.

23. 24에 가능한 작은 자연수를 곱하여 어떤 자연수의 제곱이 되게 하려고 한다. 이때, 곱해야 하는 자연수는?

① 3 ② 6 ③ 9 ④ 12 ⑤ 15

해설

$24 = 2^3 \times 3$ 이므로 제곱수가 되려면
 $2 \times 3, 2^3 \times 3, 2^3 \times 3^3, \dots$ 을 곱해야 한다.
따라서 가장 작은 자연수는 6이다.

24. $\frac{252}{A} = B^2$ 을 만족하는 자연수 A, B 에 대하여 B 의 최댓값은?
- ① 2 ② 3 ③ 6 ④ 8 ⑤ 14

해설

252 를 소인수분해하면 다음과 같다.

2) 252

2) 126

3) 63

3) 21

7

$252 = 2^2 \times 3^2 \times 7$ 이므로 $\frac{2^2 \times 3^2 \times 7}{A} = B^2$ 을 만족하는 B 의 값
중에서 가장 큰 자연수는 $A = 7$ 일 때 $2 \times 3 = 6$ 이다.

25. $\frac{686}{n} = a^2$ 을 만족하는 자연수 a 에 대하여 $a + n$ 의 값을 구하여라.
(단, n 은 조건을 만족하는 최소의 자연수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 21

해설

$$\begin{aligned} 686 &= 2 \times 7^3 \\ n &= 14, \quad a = 7 \\ a + n &= 7 + 14 = 21 \end{aligned}$$

26. $\frac{464}{n} = a^4$ 을 만족하는 자연수 a 에 대하여 $a \times n$ 의 값을 구하여라.
(단, n 은 조건을 만족하는 자연수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 58

해설

$$\begin{aligned} 464 &= 29 \times 2^4, \\ n &= 29, \quad a = 2, \\ a \times n &= 2 \times 29 = 58 \end{aligned}$$

27. 18 에 가장 작은 자연수를 곱하여 어떤 자연수의 제곱이 되게 하려고 한다. 곱해야 할 수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$18 = 2 \times 3^2$ 이므로 어떤 자연수의 제곱이 되도록 하기 위해 곱해 주어야 할 수 중 가장 작은 수는 2 이다.

28. 자연수 a, b, c 에 대하여 $120a = 270b = 150c$ 이 성립할 때, $a + b + c$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 101

해설

$120a = 2^3 \times 3 \times 5 \times a,$
 $270b = 2 \times 3^3 \times 5 \times b,$
 $150c = 2 \times 3 \times 5^2 \times c$ 이므로
 a, b, c 가 가장 작아지는 값은
 $120a = 270b = 150c = 2^3 \times 3^3 \times 5^2$ 이다.
 $\rightarrow a = 45, b = 20, c = 36$
 $\therefore a + b + c = 101$

29. $\frac{108}{n}$ 가 어떤 자연수의 제곱이 되게 하는 가장 작은 자연수 n 을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$108 = 2^2 \times 3^3 ,$$

$\frac{108}{n}$ 이 어떤 자연수의 제곱이 되게 하는 가장 작은 자연수 n 은 3 이다.

30. $360 \times a = b^2$ 을 만족시키는 자연수 a, b 중에서 가장 작은 수를 각각 x, y 라고 할 때 $x + y$ 의 값으로 알맞은 것은?

① 70 ② 80 ③ 90 ④ 100 ⑤ 110

해설

$$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$$

지수가 2의 배수이어야 하므로 $x = 2 \times 5$ 이다.

$$(2^2 \times 3 \times 5)^2 = 60^2, \quad x = 10, \quad y = 60$$

따라서 $x + y = 70$ 이다.

31. $\frac{252}{A} = B^2$ 을 만족하는 자연수 A, B 에 대하여 B 의 최대값은?
- ① 2 ② 3 ③ 6 ④ 8 ⑤ 14

해설

252 를 소인수분해하면 다음과 같다.

2)252

2)126

3)63

3)21

7

$252 = 2^2 \times 3^2 \times 7$ 이므로 $\frac{2^2 \times 3^2 \times 7}{A} = B^2$ 을 만족하는 B 의 값
중에서 가장 큰 자연수는 A = 7 일 때 $2 \times 3 = 6$ 이다.

32. 90 에 가능한 한 작은 수 a 를 곱하여 어떤 수 b^2 이 되도록 할 때, $a+b$ 의 값은? (단, a, b 는 자연수)

① 10 ② 20 ③ 30 ④ 40 ⑤ 50

해설

$90 = 2 \times 3^2 \times 5$ 이므로 곱할 수 있는 수는

$2 \times 5 \times (\text{자연수})^2$ 의 꼴이다.

$$\therefore a = 2 \times 5 \times 1^2 = 10$$

$$90 \times a = 2 \times 3^2 \times 5 \times 2 \times 5$$

$$= 2^2 \times 3^2 \times 5^2$$

$$= (2 \times 3 \times 5)^2$$

$$\therefore b = 30$$

따라서 $a+b = 10+30 = 40$ 이다.

33. 자연수 $2^a \times 3^b$ 에 24 를 곱하였더니 어떤 자연수의 제곱이 되었다. 이때, 가능한 a, b 중 가장 작은 a, b 를 올바르게 구한 것을 골라라.

- ① $a : 0, b : 0$
- ② $a : 0, b : 1$
- ③ $a : 1, b : 1$
- ④ $a : 1, b : 0$
- ⑤ $a : 2, b : 1$

해설

$2^a \times 3^b$ 이 자연수이려면 a 와 b 는 0 이상이어야 한다.
또, 어떤 자연수의 제곱이 되는 수는 소인수분해를 했을 때 모든 소인수의 지수가 짝수여야 한다. 따라서, $2^a \times 3^b$ 에 $24 = 2^3 \times 3$ 를 곱한 수가 어떤 자연수의 제곱이 되어야 하므로, $2^a \times 3^b \times 2^3 \times 3 = 2^a \times 2^3 \times 3^b \times 3 = 2^{a+3} \times 3^{b+1}$ 에서 2 의 지수인 $(a + 3)$ 과 3 의 지수인 $(b + 1)$ 이 모두 짝수여야 한다. 이를 만족하는 가장 작은 수 a, b 는 각각 1 과 1 이다.

34. $2^a \times 3^b \times 5^2$ 에 $\frac{2}{3^2}$ 을 곱하였더니 어떤 자연수의 제곱수가 되었다고 한다. 가능한 a, b 중 가장 작은 자연수를 a, b 라고 할 때, $a+b$ 는?

- ① 3 ② 4 ③ 5 ④ 7 ⑤ 8

해설

$2^a \times 3^b \times 5^2 \times \frac{2}{3^2} = 2^{(a+1)} \times 3^{(b-2)} \times 5^2$ 에서 모든 소인수의 지수가 짝수가 되도록 만드는 최소의 자연수 a, b 는 $a = 1, b = 2$ 이다. 따라서 $a + b = 1 + 2 = 3$ 이다.

35. 75 에 가장 작은 자연수를 곱하여 어떤 자연수의 제곱이 되게 하려고 한다. 곱해야 할 수는?

① 2

② 3

③ 5

④ 7

⑤ 9

해설

$75 = 3 \times 5^2$ 이므로 어떤 자연수의 제곱이 되도록 하기 위해 곱해 주어야 할 수 중 가장 작은 수는 3이다.