

1. 두 원 $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 1$, $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 4$ 의 중심을 지나는 직선의 방정식은?

① $y = 2x + 1$

② $y = 2x - 1$

③ $y = -x - 1$

④ $y = -x + 1$

⑤ $y = x + 1$

해설

두 원의 중심은 $(-2, 1)$, $(2, -3)$

$\Rightarrow$ 두 점을 지나는 직선은

$$y = \frac{-3-1}{2-(-2)}(x-2) - 3$$

$$\rightarrow y = -x - 1$$

2. 지름의 양 끝점이 (3, 0), (5, 2)인 원의 방정식이 $(x-a)^2+(y-b)^2=r$ 이다. $a+b+r$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

지름의 양 끝점의 중점의 원의 중심이므로,
중심의 좌표는 (4, 1)이다.
(지름의 길이) = $\sqrt{2^2+2^2} = 2\sqrt{2}$ 에서
반지름의 길이는 $\sqrt{2}$
따라서, 구하는 원의 방정식은
 $(x-4)^2+(y-1)^2=2$

3. 점 $(1, 5)$, $(-2, -4)$, $(5, 3)$ 을 지나는 원의 방정식이 $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ 일 때, $A \times B \times C$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

구하는 원의 방정식을
 $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0 \cdots \textcircled{1}$ 으로 놓으면
 $\textcircled{1}$ 은 세 점 $(1, 5)$, $(-2, 4)$, $(5, 3)$ 을 지나므로 연립방정식은
 $26 + A + 5B + C = 0 \cdots \textcircled{2}$
 $20 - 2A + 4B + C = 0 \cdots \textcircled{3}$
 $34 + 5A + 3B + C = 0 \cdots \textcircled{4}$
 $\textcircled{2}$, $\textcircled{3}$, $\textcircled{4}$ 에서 연립방정식을 풀면
 $A = -2$, $B = 0$, $C = -24 \cdots \textcircled{5}$

4. 방정식 $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ 으로 나타내어지는 원이 y 축에 접할 조건은? (단, a, b, c 는 모두 0 이 아니다.)

- ① $b^2 - 4c = 0$ ② $b^2 + 4c = 0$
③ $a^2 - 4c = 0$ ④ $a^2 + b^2 - 4c = 0$
⑤ $a^2 + b^2 + 4c = 0$

해설

주어진 방정식과 y 축과의 교점을 구하려면,
주어진 방정식에 $x = 0$ 을 대입하면 되므로
 $y^2 + by + c = 0 \dots\dots \textcircled{1}$
원이 y 축과 접하려면 $\textcircled{1}$ 의
식이 중근을 가져야 하므로 판별식 $D = 0$
 $\therefore D = b^2 - 4c = 0$

5. 두 원 $x^2 + y^2 = 9$, $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 4$ 의 교점의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▷ 정답 : 1 개

해설

$$A : x^2 + y^2 = 9$$

중심 $(0, 0)$, 반지름의 길이 3

$$B: (x-4)^2 + (y-3)^2 = 4$$

중심 (4, 3), 반지름의 길이 2

두 원의 중심 사이의 거리를 구하면, $\sqrt{4^2 + 3^2} = 5$
 ∴ 중심 사이의 거리는 두 원의 반지름의 합과

$\therefore$ 중심 사이의 거리는 두 원의 반지름의 합과 같다. $\therefore$ 두 원은 외접한다. 그러므로 제 1경로

같다. $\Rightarrow$ 두 원은 외접한다, 교점의 개수 1 개

6. 원 $x^2 + y^2 = 25$ 위의 점 $(-5, 0)$ 에서 접하는 직선의 방정식을 구하면?

① $x = -1$

② $x = -2$

③ $x = -3$

④ $x = -4$

⑤ $x = -5$

해설

구하는 접선의 방정식은 $-5 \cdot x + 0 \cdot y = 25$

$$-5x = 25$$

$$\therefore x = -5$$

7. 방정식 $x^2 + y^2 - 2x + 2y + k = 0$ 이 원을 나타내도록 k 값의 범위를 정하면?

① $k < -2$

② $k < -1$

③ $k > -2$

④ $k < 2$

⑤ $k > 1$

해설

방정식을 정리하면, $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 2 - k$

원이 되려면 $2 - k > 0$ 을 만족해야 한다.

$\therefore k < 2$

8. 두 점 A(-1, 0), B(2, 0) 으로부터 거리의 비가 2 : 1 인 점 P 의 자취는 어떤 원을 나타낸다. 이 때, 이 원의 반지름의 길이는?

- ① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ 4

해설

조건을 만족시키는 점 P 의 좌표를

P(x, y) 라 하면

$$\overline{AP} : \overline{BP} = 2 : 1$$

$$2\overline{BP} = \overline{AP}$$

$$\therefore 4\overline{BP}^2 = \overline{AP}^2$$

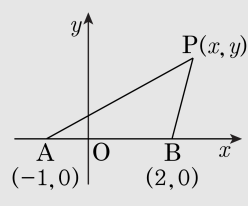
$$\text{그런데 } \overline{AP} = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$$

$$\overline{BP} = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$$

$$4\{(x-2)^2 + y^2\} = \{(x+1)^2 + y^2\}$$

$$\text{정리하면 } (x-3)^2 + y^2 = 4$$

따라서 원의 반지름은 2 이다.



9. 중심이 원점이고, 직선 $2x - y + 5 = 0$ 에 접하는 원의 반지름의 길이는?

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 2 ⑤ $\sqrt{5}$

해설

원의 반지름의 길이 r 는 원의 중심 $(0,0)$ 과 직선 $2x - y + 5 = 0$ 사이의 거리와 같으므로

$$r = \frac{|0 + 0 + 5|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \sqrt{5}$$

10. 원 $x^2 + y^2 = 8$ 과 직선 $y = x + k$ 가 서로 다른 두 점에서 만나도록 상수 k 의 값의 범위를 구하면?

- ① $-2 < k < 2$ ② $0 < k < 4$ ③ $-4 < k < 0$
④ $-2 < k < 0$ ⑤ $-4 < k < 4$

해설

원의 중심과 직선 사이의 거리 d 를 구하면

$$d = \frac{|0 + 0 + k|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|k|}{\sqrt{2}}$$

이 때, 원의 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$ 이므로

원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면 $d < r$ 이고

$$\frac{|k|}{\sqrt{2}} < 2\sqrt{2} \quad \therefore -4 < k < 4$$

11. 원 $x^2 + y^2 = 4$ 과 직선 $y = 2x + k$ 가 서로 다른 두 점에서 만날 때, k 의 값의 범위는?

① $-2\sqrt{5} < k < 2\sqrt{5}$

② $-3\sqrt{5} < k < 3\sqrt{5}$

③ $-4\sqrt{5} < k < 4\sqrt{5}$

④ $k < -\sqrt{5}$ 또는 $k > \sqrt{5}$

⑤ $k < -2\sqrt{5}$ 또는 $k > 2\sqrt{5}$

해설

원의 중심과 직선 사이의 거리 d 는

$$d = \frac{|0 + 0 + k|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|k|}{\sqrt{5}}$$

이 때, 원의 반지름의 길이가 2 이므로

원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$$\frac{|k|}{\sqrt{5}} < 2 \quad \therefore -2\sqrt{5} < k < 2\sqrt{5}$$

12. 점 A(-2, 3) 에서 원 $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ 에 그은 접선의 접점을 B라 할 때, AB의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

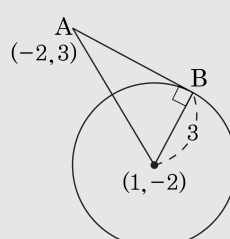
해설

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$$

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 3^2$$

원의 중심은 (1, -2), 반지름은 3 이므로

$$AB = \sqrt{(3^2 + (-5)^2) - 3^2} = 5$$



13. 원 $x^2 + y^2 = 9$ 위의 점 (a, b) 에서의 접선이 점 $(6, 6)$ 을 지날 때, ab 의 값은?

- ① $-\frac{27}{8}$ ② $-\frac{15}{8}$ ③ $-\frac{7}{8}$ ④ $\frac{5}{8}$ ⑤ $\frac{15}{8}$

해설

원 위의 점 (a, b) 에서의 접선의 방정식은

$ax + by = 9$ 이고

이 접선이 점 $(6, 6)$ 을 지나므로

$$6a + 6b = 9 \quad \therefore a + b = \frac{3}{2}$$

또, 점 (a, b) 는 원 위의 점이므로

$$a^2 + b^2 = 9$$

이때, $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$ 에서

$$9 = \frac{9}{4} - 2ab \quad \therefore ab = -\frac{27}{8}$$

14. 원 $x^2 + y^2 = 4$ 위의 점 $P(-1, \sqrt{3})$ 에서의 접선과 직선 $y = x$ 와의 교점의 좌표는?

① $(\sqrt{3}, \sqrt{3})$

② $(2\sqrt{5}, 2\sqrt{5})$

③ $(4, 4)$

④ $(2\sqrt{3} + 2, 2\sqrt{3} + 2)$

⑤ $(2\sqrt{3} - 2, 2\sqrt{3} - 2)$

해설

원 $x^2 + y^2 = 4$

위의 점 $P(-1, \sqrt{3})$ 에서의 접선의 방정식은

$-x + \sqrt{3}y = 4$ 이므로 이 방정식과

$y = x$ 를 연립하면 $-x + \sqrt{3}x = 4$

$\therefore x = \frac{4}{\sqrt{3} - 1} = 2\sqrt{3} + 2$

따라서 구하는 교점의 좌표는

$(2\sqrt{3} + 2, 2\sqrt{3} + 2)$

15. 원 $x^2 + y^2 = 5$ 위의 점 A(1,2)에서 그은 접선의 방정식은?

① $-2x + y + 5 = 0$

② $-2x + y - 3 = 0$

③ $x - y + 5 = 0$

④ $x + 2y + 5 = 0$

⑤ $x + 2y - 5 = 0$

해설

접점이 주어졌을 때 접선의 방정식 구하는 공식

$x_1x + y_1y = r^2$ 을 이용하면,

$$1 \cdot x + 2 \cdot y = 5 \quad \therefore x + 2y - 5 = 0$$