

1. 수직선 위의 두 점 A(5), B(-2) 사이의 거리를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$$\overline{AB} = \overline{BA} = |5 - (-2)| = |7| = 7$$

2. 두 점 (2, 1), (3, 4) 를 지나는 직선에 평행하고, x 절편이 2 인 직선의 방정식은?

- ㉠ $y = 3x - 6$ ㉡ $y = 3x - 2$ ㉢ $y = 3x - 1$
㉣ $y = 3x + 6$ ㉤ $y = 3x + 2$

해설

두 점 (2, 1), (3, 4) 를 지나는 직선의 기울기는 $\frac{4-1}{3-2} = 3$ 이므로, 구하는 직선의 기울기는 3 이고, x 절편이 2 인 직선이므로,
 $y = 3(x - 2)$
 $\therefore y = 3x - 6$

3. 두 점 (2, 1), (3, 4) 를 지나는 직선에 평행하고, x 절편이 2 인 직선의 기울기를 a , y 절편을 b 라 할 때 $a - b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

두 점 (2, 1), (3, 4) 를 지나는

직선의 기울기는 $a = \frac{4-1}{3-2} = 3$

$\therefore y = 3(x-2)$

$y = 3x - 6$ 에서

y 절편은 $b = -6$ 이므로

$\therefore a - b = 9$

4. 원 $x^2 + y^2 - 2kx - 4 = 0$ (k 는 임의의 실수)에 대하여 다음 중 반드시 옳은 것은?
- ① 반지름의 길이가 2 인 원이다.
 - ② 원의 중심은 y 축 위에 있다.
 - ③ 원은 두 점 $(0, -2), (0, 2)$ 를 지난다.
 - ④ 원의 중심은 직선 $y = x$ 위에 존재한다.
 - ⑤ 원은 점 $(1, 0)$ 을 지난다.

해설

$x^2 + y^2 - 2kx - 4 = 0$ 을 변형하면
 $(x - k)^2 + y^2 = 4 + k^2$ 이므로
 $x = 0$ 일 때, k 에 관계없이 $y^2 = 4$
 $\therefore y = \pm 2$
따라서 주어진 원은
 $(0, -2), (0, 2)$ 의 두 점을 지난다.
또한, 원의 중심은 x 축 위에 있다

5. 삼각형 ABC의 세 꼭짓점의 좌표가 A (1, 1), B (2, 4), C(6, 3)이고 선분 AB를 2 : 1로 외분하는 점을 D라 하자. 삼각형 BCD의 무게중심의 좌표가 (x, y)일 때, $x - y$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

두 점 A(1, 1), B(2, 4)이므로

점 D의 좌표를 (a, b)라 하면

$$a = \frac{2 \cdot 2 - 1 \cdot 1}{2 - 1} = 3, b = \frac{2 \cdot 4 - 1 \cdot 1}{2 - 1} = 7$$

따라서 D(3, 7)이므로

삼각형 BCD의 무게중심의 좌표 (x, y)는

$$x = \frac{2 + 6 + 3}{3} = \frac{11}{3}, y = \frac{4 + 3 + 7}{3} = \frac{14}{3}$$

$$\therefore x - y = \frac{11}{3} - \frac{14}{3} = -1$$

6. 세 점 A(-2, 9), B(3, -1), C(5, a)가 일직선 위에 있을 때, 상수 a 의 값은 얼마인가?

① -6

② -5

③ 2

④ 9

⑤ 13

해설

일직선 위에 있으려면 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ 의 기울기가 같다.

$\overline{AB}$ 의 기울기는 $\frac{9 - (-1)}{-2 - 3} = -2$ 이고

$\overline{BC}$ 의 기울기는 $\frac{a - (-1)}{5 - 3}$ 이다.

$\therefore a = -5$

7. 포물선 $x = y^2 + 1$ 위의 점 (a, b) 와 직선 $x - y + 1 = 0$ 사이의 거리가 최소가 될 때, $4(a + b)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

(a, b) 가 포물선 $x = y^2 + 1$ 위의 점이고,
또 점 (a, b) 와 직선 사이의 거리를 l 이라 하면,

$$a = b^2 + 1 \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

$$l = \frac{|a - b + 1|}{\sqrt{2}} \dots\dots \textcircled{2}$$

①를 ②에 대입하면

$$l = \frac{|b^2 - b + 2|}{\sqrt{2}} = \frac{\left| \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} \right|}{\sqrt{2}}$$

$\therefore b = \frac{1}{2}$ 일 때 l 이 최소가 된다.

따라서 $a + b = \frac{5}{4} + \frac{1}{2} = \frac{7}{4}$ 이므로

$$\therefore 4(a + b) = 7$$

8. 복소수 $z = a + bi$ 를 좌표평면 위의 점 $P(a, b)$ 에 대응시킬 때, $(2 - 3i)z$ 가 실수가 되게 하는 점 P 가 그리는 도형은? (단, a, b 는 실수, $i = \sqrt{-1}$)
- ① 원

② 아래로 볼록한 포물선

③ 위로 볼록한 포물선

④ 기울기가 음인 직선

⑤ 기울기가 양인 직선

해설

$$(2 - 3i)z = (2 - 3i)(a + bi)$$
$$= (2a + 3b) + (2b - 3a)i \cdots \textcircled{1}$$

①이 실수이려면 $2b = 3a$

$$\therefore b = \frac{3}{2}a$$

따라서, 기울기가 양인 직선이다.

9. 원 $x^2 + y^2 = 4$ 과 직선 $y = 2x + k$ 가 서로 다른 두 점에서 만날 때, k 의 값의 범위는?

① $-2\sqrt{5} < k < 2\sqrt{5}$

② $-3\sqrt{5} < k < 3\sqrt{5}$

③ $-4\sqrt{5} < k < 4\sqrt{5}$

④ $k < -\sqrt{5}$ 또는 $k > \sqrt{5}$

⑤ $k < -2\sqrt{5}$ 또는 $k > 2\sqrt{5}$

해설

원의 중심과 직선 사이의 거리 d 는

$$d = \frac{|0 + 0 + k|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|k|}{\sqrt{5}}$$

이 때, 원의 반지름의 길이가 2 이므로

원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$$\frac{|k|}{\sqrt{5}} < 2 \quad \therefore -2\sqrt{5} < k < 2\sqrt{5}$$

10. $\triangle ABC$ 에서 $A(6, 1)$, $B(-1, 2)$, $C(2, 3)$ 이라 한다. 이 삼각형의 외접원의 반지름을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

외심을 $P(a, b)$ 라 하면

$$(1) \overline{PA}^2 = \overline{PB}^2 \Leftrightarrow (a-6)^2 + (b-1)^2 = (a+1)^2 + (b-2)^2 \dots\dots\textcircled{1}$$

$$\overline{PA}^2 = \overline{PC}^2 \Leftrightarrow (a-6)^2 + (b-1)^2 = (a-2)^2 + (b-3)^2 \dots\dots\textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 를 각각 전개하여 정리하면

$$7a - b - 16 = 0, \quad 2a - b - 6 = 0$$

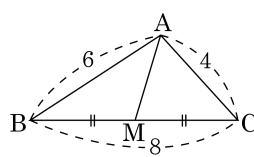
연립하여 풀면 $a = 2, b = -2$

따라서 외심은 $(2, -2)$ 이다.

$$(2) \overline{PA}^2 = (2-6)^2 + (-2-1)^2 = 25$$

$$\therefore \overline{PA} = 5$$

11. 다음 그림의 $\triangle ABC$ 에서 $\overline{AB} = 6$, $\overline{BC} = 8$, $\overline{AC} = 4$ 이고, $\overline{BC}$ 의 중점이 M일 때, $\overline{AM}^2$ 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

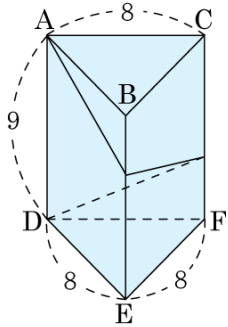
중선정리에 의하여
 $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2)$ 이므로

$$6^2 + 4^2 = 2(\overline{AM}^2 + 4^2)$$

$$36 + 16 = 2\overline{AM}^2 + 32$$

$$\therefore \overline{AM}^2 = 10$$

12. 다음 그림과 같은 삼각기둥의 꼭짓점 A 에서 출발하여 모서리 BE, CF 를 순서대로 지나 꼭짓점 D 에 이르는 최단 거리를 구하여라.

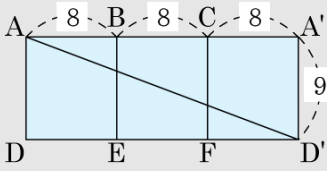


▶ 답 :

▷ 정답 : $3\sqrt{73}$

해설

$$\overline{AD'} = \frac{\sqrt{24^2 + 9^2}}{\sqrt{576 + 81}} = \frac{\sqrt{657}}{\sqrt{657}} = 3\sqrt{73}$$



13. 두 점 A(1, 2), B(-3, 0) 으로부터 같은 거리에 있는 점들의 자취의 방정식은?

- ① $y = 2x + 1$
- ② $y = 2x - 1$
- ③ $y = -2x + 1$
- ④ $y = -2x - 1$
- ⑤ $y = -x + 2$

해설

구하는 점을 P(x,y) 라 하면
 $\overline{AP} = \overline{BP}$ 이므로
 $\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x+3)^2 + y^2}$
양변을 제곱해서 정리하면
 $-8x - 4y - 4 = 0, -4y = 8x + 4$
 $\therefore y = -2x - 1$

해설

두 점으로부터 같은 거리에 있는 점의 자취는 선분의 수직이등분이다.
 $\overline{AB}$ 의 기울기가 $\frac{1}{2}$ 이므로
 $\overline{AB}$ 의 수직이등분선은 기울기는 -2 이고
 $\overline{AB}$ 의 중점(-1, 1)을 지난다.
 $\therefore y - 1 = -2(x + 1)$
 $\therefore y = -2x - 1$

14. 세 점 A(1, 6), B(-2, 2), C(4, 1)을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC와 임의의 점 P(a, b)에 대하여 $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$ 의 값이 최소일 때, a + b의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$$\begin{aligned} & \overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 \\ &= \{(a-1)^2 + (b-6)^2\} + \{(a+2)^2 + (b-2)^2\} \\ & \quad + \{(a-4)^2 + (b-1)^2\} \\ &= 3a^2 - 6a + 3b^2 - 18b + 62 \\ &= 3(a^2 - 2a + 1) + 3(b^2 - 6b + 9) + 32 \\ &= 3(a-1)^2 + 3(b-3)^2 + 32 \end{aligned}$$

이때, a, b는 실수이므로
 $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$ 의 값은
a = 1, b = 3일 때 최소이다.
∴ a + b = 4