

1. 직선 $2x - 3y = 1$ 과 수직이고, 점 $(4, 11)$ 를 지나는 직선의 y 절편은?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$2x - 3y = 1$ 과 수직이므로 직선의 기울기는 $-\frac{3}{2}$

$y = -\frac{3}{2}x + b$ 에 $(4, 11)$ 를 대입하면 $b = 5$

따라서 y 절편은 5이다.

2. 두 원 $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 1$, $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 4$ 의 중심을 지나는 직선의 방정식은?

① $y = 2x + 1$

② $y = 2x - 1$

③ $y = -x - 1$

④ $y = -x + 1$

⑤ $y = x + 1$

해설

두 원의 중심은 $(-2, 1)$, $(2, -3)$

⇒ 두 점을 지나는 직선은

$$y = \frac{-3-1}{2-(-2)}(x-2) - 3$$

$$\rightarrow y = -x - 1$$

3. 방정식 $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$ 으로 나타내어지는 원이 y 축에 접할 조건은?

① $b^2 = c$

② $c^2 = b$

③ $a^2 = c$

④ $c^2 = a$

⑤ $b = 2c$

해설

y 축과의 공유점을 구하는 식은
 $x = 0$ 으로부터 $y^2 + 2by + c = 0$
 y 축에 접할 조건은 $D/4 = b^2 - c = 0$

4. 다음은 원 $x^2 + y^2 = 1$ 과 직선 $y = 2x + k$ 가 서로 만나지 않을 때, k 의 값의 범위를 구하는 과정이다. (가), (나), (다) 에 들어갈 알맞은 것을 고르면?

$$x^2 + y^2 = 1 \cdots \textcircled{㉠}$$
$$y = 2x + k \cdots \textcircled{㉡}$$

㉡을 ㉠에 대입하여 식을 정리하면

$$5x^2 + 4kx + k^2 - 1 = 0 \cdots \textcircled{㉢}$$

㉢과 ㉡이 서로 만나지 않으려면

$$D = (4k)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (k^2 - 1)$$

(가) 0
 k^2 (나) 5 ∴ (다)

- ① (가):> , (나):< , (다):- $\sqrt{5} < k < \sqrt{5}$
② (가):= , (나):= , (다): $k = \pm \sqrt{5}$
③ (가):> , (나):< , (다):- $\sqrt{5} < k < \sqrt{5}$
④ (가):> , (나):> , (다): $k > \sqrt{5}$ 또는 $k < -\sqrt{5}$
⑤ (가):< , (나):> , (다): $k > \sqrt{5}$ 또는 $k < -\sqrt{5}$

해설

(가): 원과 직선이 만나지 않으면 판별식이 0보다 작다.
(나): 판별식을 정리하면, $k^2 > 5$
(다): $k^2 - 5 > 0 \Rightarrow k > \sqrt{5}$ 또는 $k < -\sqrt{5}$

5. $x^2 + y^2 = 5$ 에 접하고, 기울기가 -2 이며, 제 1, 2, 4사분면을 지나는 접선의 방정식을 구하면?

① $y = -2x - \sqrt{5}$

② $y = -2x + 5$

③ $y = -2x - 3\sqrt{5}$

④ $y = -2x - 5$

⑤ $y = -2x - 5\sqrt{5}$

해설

기울기가 -2 인 직선의 방정식을 $y = -2x + c$ 라 하고, 직선과 원점간의 거리가 원의 반지름인 $\sqrt{5}$ 와 같으므로

$$\frac{|c|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

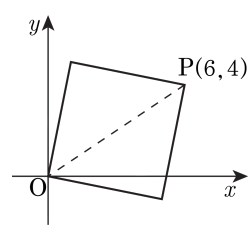
$$\therefore c = \pm 5$$

제 1, 2, 4사분면을 지나야 하므로

$$\therefore c = 5 \quad \therefore y = -2x + 5$$

6. 다음 그림과 같은 정사각형의 넓이는?

- ① 16 ② 20 ③ 26
④ 32 ⑤ 52



해설

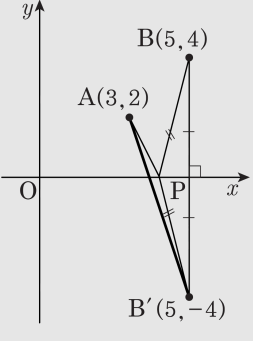
$\overline{OP} = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52}$ 이므로
주어진 정사각형의 한 변의 길이를 a 라고 하면
 $\sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{52}$ 에서 $a^2 = 26$ 이다.
따라서 정사각형의 넓이는 26이다

7. 좌표평면 위의 두 점 A(3,2) , B(5,4) 와 x 축 위를 움직이는 점 P 에 대하여 $\overline{PA} + \overline{PB}$ 의 최솟값은?

- ① 6
- ② $\sqrt{37}$
- ③ $\sqrt{38}$
- ④ $\sqrt{39}$
- ⑤ $\sqrt{40}$

해설

다음 그림과 같이 점 B(5, 4) 를 x 축에 대하여
대칭이동한 점을 B'(5, -4) 라 하면
 $\overline{PB} = \overline{PB'}$ 이므로
 $\overline{PA} + \overline{PB} = \overline{PA} + \overline{PB'} \geq \overline{AB'}$
따라서 $\overline{PA} + \overline{PB}$ 의 최솟값은 $\overline{AB'}$ 이고
 $\overline{AB'} = \sqrt{(5-3)^2 + (-4-2)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$



8. 평행사변형 ABCD에서 꼭짓점 A(-1, -2), B(6, 4), D(0, 2)이고, $\overline{AB}$ 와 BC가 이웃하는 두 변일 때 나머지 한 꼭짓점 C의 좌표는?

① C(5, 0)

② C(0, 5)

③ C(7, 8)

④ C(8, 7)

⑤ C(7, 6)

해설

$C(a, b)$ 라고 하면, 평행사변형의 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분하므로 $\overline{AC}$ 의 중점과 $\overline{BD}$ 의 중점은 같다.

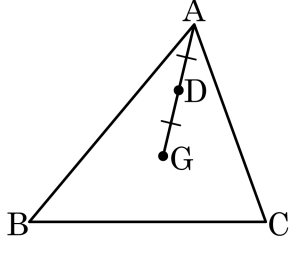
$$\left(\frac{-1+a}{2}, \frac{-2+b}{2}\right) = \left(\frac{6+0}{2}, \frac{4+2}{2}\right)$$

$$-1+a=6, \quad -2+b=6$$

$$\therefore a=7, \quad b=8$$

$$\therefore C(7, 8)$$

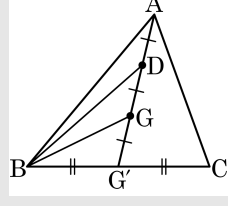
9. 다음 그림과 같이 $\triangle ABC$ 에서 점 G 는 $\triangle ABC$ 의 무게중심이고 점 D 는 $\overline{AG}$ 의 중점일 때, $\frac{\triangle DBG}{\triangle ABC}$ 의 값은?



- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{5}$ ④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

해설

$\overline{AG}$ 의 연장선이 $\overline{BC}$ 와 만난 점을 G' 이라고 하면



$\overline{BG'} = \overline{G'C}$ 에서

$$\triangle ABG' = \frac{1}{2}\triangle ABC$$

$$\overline{DG} = \frac{1}{3}\overline{AG'} \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} \triangle DBG &= \frac{1}{3}\triangle ABG' \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\triangle ABC \\ &= \frac{1}{6}\triangle ABC \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{\triangle DBG}{\triangle ABC} = \frac{1}{6}$$

10. 직선 $y = -x + 1$ 의 기울기와 y 절편, x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

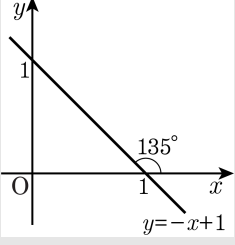
▷ 정답 : 기울기 -1

▷ 정답 : y 절편 1

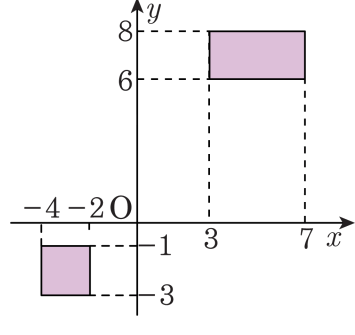
▷ 정답 : x 축의 양의 방향 135°

해설

기울기 -1 , y 절편 1 ,
 x 축의 양의 방향과
이루는 각 135°



11. 다음 그림과 같이 좌표평면 위에 정사각형과 직사각형이 놓여 있다. 이 정사각형과 직사각형의 넓이를 동시에 이등분하는 직선의 기울기는?



- ① $\frac{9}{10}$ ② $\frac{9}{8}$ ③ $\frac{8}{7}$ ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ 1

해설

직사각형 ABCD 에서 두 대각선의 교점을 M이라 하자.
점 M을 지나는 임의의 직선 l 이 직사각형과 만나는 점을 각각 P, Q 라 하면
 l 의 기울기에 관계없이 $\triangle BMQ = \triangle DMP$ 이므로,
M을 지나는 임의의 직선은 직사각형의 넓이를 이등분한다.
정사각형의 두 대각선의 교점의 좌표는 $(-3, -2)$
직사각형의 두 대각선의 교점의 좌표는 $(5, 7)$ 이므로
두 점을 지나는 직선의 기울기는
$$\frac{7 - (-2)}{5 - (-3)} = \frac{9}{8}$$

12. 점 P(1, 2) 에서 직선 $2x + y - 3 = 0$ 에 내린 수선의 발을 H 라할 때, 수선 PH 의 길이는?

- ① $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ③ $4\sqrt{2}$ ④ 2 ⑤ 3

해설

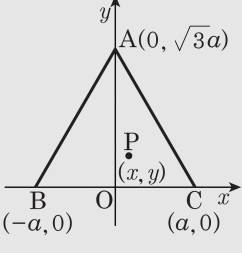
(PH 의 길이)
= (점 P(1, 2) 와 직선 $2x + y - 3 = 0$ 과의 거리)

$$\therefore \overline{PH} = \frac{|2 + 2 - 3|}{\sqrt{4 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

13. 좌표평면 위의 정삼각형 ABC에 대하여 $2\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$ 을 만족시키는 점 P의 자취는 어떤 도형을 그리는가?
- ① 삼각형 ② 직선 ③ 선분
④ 원 ⑤ 원 아닌 곡선

해설

그림과 같이 변 BC의 중점을 원점으로 하는 좌표축을 설정하고 점 C의 좌표를 $C(a,0)$ 이라고 두면, $B(-a,0)$, $A(0, \sqrt{3}a)$ 이다.



이 때, 점 P의 좌표를 $P(x,y)$ 라 하면

$$2\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 \text{ 이므로}$$
$$2\{x^2 + 2(y - \sqrt{3}a)^2\}$$
$$= (x+a)^2 + y^2 + (x-a)^2 + y^2$$

정리하여 간단히 하면, $y = \frac{\sqrt{3}}{3}a$

∴ 직선

14. x, y 에 대한 이차방정식 $x^2 + y^2 - 2kx + 2ky + 3k^2 - 4k + 2 = 0$ 이
반지름의 길이가 1 인 원의 방정식일 때, 상수 k 값의 합을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

주어진 방정식을 변형하면

$$(x - k)^2 + (y + k)^2 = -k^2 + 4k - 2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

반지름의 길이가 1 이므로

$$\textcircled{1} \text{에서 } -k^2 + 4k - 2 = 1 \leftarrow r^2 = 1$$

$$k^2 - 4k + 3 = 0, (k - 1)(k - 3) = 0$$

$$\therefore k = 1 \text{ 또는 } k = 3$$

따라서 합은 4이다.

15. 세 점 $(-1, 1)$, $(2, 2)$, $(6, 0)$ 을 지나는 원의 중심의 좌표는?

① $(2, 3)$

② $(-2, 3)$

③ $(2, -3)$

④ $(-2, -3)$

⑤ $\left(2, \frac{3}{2}\right)$

해설

세 점 $(-1, 1)$, $(2, 2)$, $(6, 0)$ 을 지나는 원의 방정식을

$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ 이라 하면

이 원이 세점을 지나므로

$$(-1)^2 + 1^2 - a + b + c = 0$$

$$\therefore a - b - c = 2 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$2^2 + 2^2 + 2a + 2b + c = 0$$

$$\therefore 2a + 2b + c = -8 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$6^2 + 6a + c = 0$$

$$\therefore 6a + c = -36 \cdots \cdots \textcircled{3}$$

①, ②, ③을 연립하여 풀면

$$a = -4, \quad b = 6, \quad c = -12$$

즉, $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$ 이므로

표준형으로 나타내면

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25$$

따라서, 원의 중심의 좌표는 $(2, -3)$ 이다.

16. 방정식 $x^2 + y^2 + 4x - 6y + k + 10 = 0$ 이 원을 나타내도록 하는 실수 k 의 값의 범위는?

① $k < 3$

② $k > 3$

③ $0 < k < 3$

④ $k > 2$

⑤ $k < 2$

해설

$x^2 + y^2 + 4x - 6y + k + 10 = 0$ 을 완전제곱식으로

나타내면 $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 3 - k$

원이 되려면 반지름이 0 보다 커야 하므로

$\sqrt{3 - k} > 0, 3 - k > 0 \quad \therefore k < 3$

17. 점 $(2, 1)$ 을 지나고 x 축, y 축에 동시에 접하는 원의 방정식의 반지름의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

원이 점 $(2, 1)$ 을 지나고 x 축, y 축에 접하면
제 1 사분면에 위치하므로 반지름이 r 이면
중심이 (r, r) 이다.
 $(x-r)^2 + (y-r)^2 = r^2$ 이고
또한 $(2, 1)$ 을 지나므로
 $(2-r)^2 + (1-r)^2 = r^2$,
 $(r-1)(r-5) = 0$
 $\therefore r = 1$ 또는 5
 $\therefore (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ 또는 $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 5^2$
 $\therefore 1 + 5 = 6$

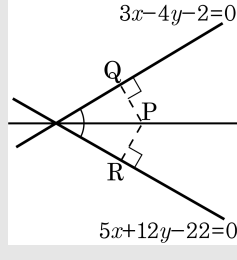
18. 두 직선 $3x-4y-2=0$, $5x+12y-22=0$ 이 이루는 각을 이등분하는 직선의 방정식 중에서 기울기가 양인 직선이 $ax+by+c=0$ 일 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라. (단, a 는 양수, a, b, c 는 정수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

구하는 각의 이등분선 위의 임의의 점 $P(X, Y)$ 에 대하여 P에서 두 직선에 내린 수선의 발을 각각 Q, R이라 하면



$\overline{PQ} = \overline{PR}$ 이므로

$$\frac{|3X-4Y-2|}{\sqrt{9+16}} = \frac{|5X+12Y-22|}{\sqrt{25+144}}$$

$$13(3X-4Y-2) = \pm 5(5X+12Y-22)$$

$$\text{즉, } 13(3X-4Y-2) = 5(5X+12Y-22) \text{ 또는}$$

$$13(3X-4Y-2) = -5(5X+12Y-22) \text{ 정리하면}$$

$$x-8y+6=0 \text{ 또는 } 8x+y-17=0 \text{ 에서}$$

기울기가 양이므로

$$\therefore x-8y+6=0$$

$$\therefore a+b+c=-1$$

19. $x^2 + y^2 - 4x + 2ay - 1 = 0$ 이 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭일 때, 상수 a 의 값을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

원의 방정식을 정리하면,
 $(x-2)^2 + (y+a)^2 = 5 + a^2$
 $y = x$ 에 대칭이라면 원 중심이
 $y = x$ 위에 있어야 한다.
 $\therefore a = -2$

20. 모든 실수 k 에 대하여 직선 $(1+k)x+y-2k=0$ 에 대칭이고, 반지름의 길이가 3 인 원의 방정식을 구하면?

- ① $(x+2)^2+(y-2)^2=9$ ② $(x-2)^2+(y+2)^2=9$
③ $(x-1)^2+(y-2)^2=9$ ④ $(x+1)^2+(y+2)^2=9$
⑤ $(x-1)^2+(y+2)^2=9$

해설

$(1+k)x+y-2k=0$
 $x+kx+y-2k=0$ (k 는 임의의 실수)
 $x+y+k(x-2)=0$
이 직선은 항상 $(2, -2)$ 를 지난다.
따라서 이와 같은 모든 직선에 대칭인 원의 중심은 $(2, -2)$ 이다.
 $\therefore (x-2)^2+(y+2)^2=9$

21. 원 $x^2 + y^2 - 4ax + 2ay + 30a - 48 = 0$ 의 넓이가 최소일 때, 이 원의 중심의 좌표가 (p, q) 이다. 이 때 $p + q$ 의 값은?

① -9 ② -6 ③ -3 ④ 3 ⑤ 6

해설

$x^2 + y^2 - 4ax + 2ay + 30a - 48 = 0$ 을

표준형으로 고치면

$$(x - 2a)^2 + (y + a)^2 = 5a^2 - 30a + 48$$

이 원의 넓이는

$$\pi(5a^2 - 30a + 48) = 5\pi(a - 3)^2 + 3\pi$$

따라서 $a = 3$ 일 때 넓이가 최소.

중심은 $(6, -3)$

$$\therefore p = 6, q = -3$$

$$\therefore p + q = 3$$

22. 중심이 직선 $3x + y = 12$ 의 제 1 사분면 위에 있고, x 축과 y 축에 동시에 접하는 원의 방정식의 중심이 (a, b) 일 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

구하는 원의 반지름의 길이를 r 라 하면
중심의 좌표는 (r, r) 이다.
따라서, 구하는 원의 방정식을
 $(x - r)^2 + (y - r)^2 = r^2 \dots\dots\dots \textcircled{1}$
한편, 점 (r, r) 는 직선 $3x + y = 12$ 위에 있으므로 $3r + r = 12$
 $\therefore r = 3$
따라서, 구하는 원의 방정식은 $\textcircled{1}$ 에서 $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 3^2$