1. 직선 $2x-3y=1$과 수직이고, 점 $(4,\ 11)$를 지나는 직선의 y절편은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$2x-3y=1$과 수직이므로 직선의 기울기는 $-\frac{3}{2}$

$y=-\frac{3}{2}x+b$에 $(4,\ 11)$를 대입하면 $b=5$

따라서 y절편은 5이다.

2. 두 원 $(x+2)^2+(y-1)^2=1$, $(x-2)^2+(y+3)^2=4$ 의 중심을 지나는 직선의 방정식은?

① $y=2x+1$　　② $y=2x-1$　　③ $y=-x-1$

④ $y=-x+1$　　⑤ $y=x+1$

해설

두 원의 중심은 $(-2,1)$, $(2,-3)$

$\Rightarrow$ 두 점을 지나는 직선은

$$y=\frac{-3-1}{2-(-2)}(x-2)-3$$

$\rightarrow$ $y=-x-1$

3. 방정식 $x^2+y^2+2ax+2by+c=0$ 으로 나타내어지는 원이 y 축에 접할 조건은?

① $b^2=c$　② $c^2=b$　③ $a^2=c$

④ $c^2=a$　⑤ $b=2c$

해설

y 축과의 공유점을 구하는 식은

$x=0$ 으로부터 $y^2+2by+c=0$

y 축에 접할 조건은 $D/4=b^2-c=0$

4. 다음은 원 $x^2+y^2=1$ 과 직선 $y=2x+k$ 가 서로 만나지 않을 때, k 의 값의 범위를 구하는 과정이다. (가), (나), (다) 에 들어갈 알맞은 것을 고르면?

> $x^2+y^2=1\cdots$ ㉠
> $y=2x+k\cdots$ ㉡
> ㉡을 ㉠에 대입하여 식을 정리하면
> $5x^2+4kx+k^2-1=0\cdots$ ㉢
> ㉠과 ㉡이 서로 만나지 않으려면
> $D=(4k)^2-4\cdot5\cdot(k^2-1)$
> (가)0
> k^2(나)5 $\quad\therefore$ (다)

① (가):$>$, (나):$<$, (다):$-\sqrt{5}<k<\sqrt{5}$

② (가):$=$, (나):$=$, (다):$k=\pm\sqrt{5}$

③ (가):$>$, (나):$<$, (다):$-\sqrt{5}<k<\sqrt{5}$

④ (가):$>$, (나):$>$, (다):$k>\sqrt{5}$ 또는 $k<-\sqrt{5}$

⑤ (가):$<$, (나):$>$, (다):$k>\sqrt{5}$ 또는 $k<-\sqrt{5}$

해설

(가): 원과 직선이 만나지 않으면 판별식이 0보다 작다.
(나): 판별식을 정리하면, $k^2>5$
(다): $k^2-5>0 \quad\Rightarrow\quad k>\sqrt{5}$ 또는 $k<-\sqrt{5}$

5. $x^2+y^2=5$에 접하고, 기울기가 -2이며, 제 $1, 2, 4$사분면을 지나는 접선의 방정식을 구하면?

① $y=-2x-\sqrt{5}$

② $y=-2x+5$

③ $y=-2x-3\sqrt{5}$

④ $y=-2x-5$

⑤ $y=-2x-5\sqrt{5}$

해설

기울기가 -2인 직선의 방정식을 $y=-2x+c$라 하고, 직선과 원점간의 거리가 원의 반지름인 $\sqrt{5}$와 같으므로

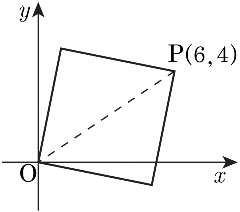
$$\frac{|c|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

$\therefore\ c=\pm 5$

제 $1, 2, 4$사분면을 지나야 하므로

$\therefore\ c=5 \quad \therefore y=-2x+5$

6. 다음 그림과 같은 정사각형의 넓이는?



① 16 ② 20 ③ 26

④ 32 ⑤ 52

해설

$\overline{OP} = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52}$ 이므로

주어진 정사각형의 한 변의 길이를 a라고 하면

$\sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{52}$ 에서 $a^2 = 26$ 이다.

따라서 정사각형의 넓이는 26이다

7. 좌표평면 위의 두 점 $A(3,2)$, $B(5,4)$ 와 x 축 위를 움직이는 점 P 에 대하여 $\overline{PA}+\overline{PB}$ 의 최솟값은?

① 6 ② $\sqrt{37}$ ③ $\sqrt{38}$ ④ $\sqrt{39}$ ⑤ $\sqrt{40}$

해설

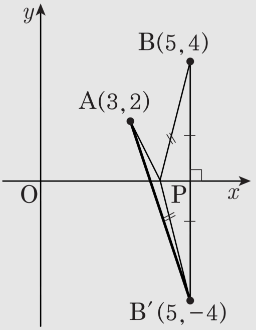
다음 그림과 같이 점 $B(5,\ 4)$ 를 x 축에 대하여 대칭이동한 점을 $B'(5,-4)$ 라 하면

$\overline{PB}=\overline{PB'}$ 이므로

$\overline{PA}+\overline{PB}=\overline{PA}+\overline{PB'}\geq\overline{AB'}$

따라서 $\overline{PA}+\overline{PB}$ 의 최솟값은 $\overline{AB'}$ 이고

$\overline{AB'}=\sqrt{(5-3)^2+(-4-2)^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$



8. 평행사변형 ABCD에서 꼭짓점 $A(-1,\ -2)$, $B(6,\ 4)$, $D(0,\ 2)$이고, $\overline{AB}$와 $\overline{BC}$가 이웃하는 두 변일 때 나머지 한 꼭짓점 C의 좌표는?

① $C(5,\ 0)$ ② $C(0,\ 5)$ ③ $C(7,\ 8)$

④ $C(8,\ 7)$ ⑤ $C(7,\ 6)$

해설

$C(a, b)$ 라고 하면, 평행사변형의 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분하므로 $\overline{AC}$의 중점과 $\overline{BD}$의 중점은 같다.

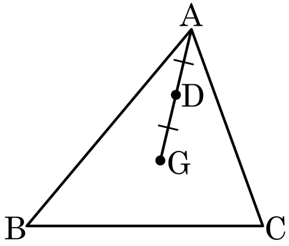
$$\left(\frac{-1+a}{2},\ \frac{-2+b}{2}\right) = \left(\frac{6+0}{2},\ \frac{4+2}{2}\right)$$

$-1+a=6,\ \ -2+b=6$

$\therefore\ a=7,\ b=8$

$\therefore\ C(7,8)$

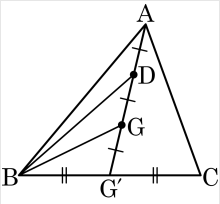
9. 다음 그림과 같이 $\triangle ABC$에서 점 G는 $\triangle ABC$의 무게중심이고 점 D는 $\overline{AG}$의 중점일 때, $\dfrac{\triangle DBG}{\triangle ABC}$의 값은?



① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{5}$ ④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

해설

$\overline{AG}$의 연장선이 $\overline{BC}$와 만난 점을 G′이라고 하면



$\overline{BG'} = \overline{G'C}$에서

$\triangle ABG' = \frac{1}{2}\triangle ABC$

$\overline{DG} = \frac{1}{3}\overline{AG'}$이므로

$$\begin{aligned}\triangle DBG &= \frac{1}{3}\triangle ABG' \\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\triangle ABC \\ &= \frac{1}{6}\triangle ABC\end{aligned}$$

$\therefore \dfrac{\triangle DBG}{\triangle ABC} = \dfrac{1}{6}$

10. 직선 $y=-x+1$의 기울기와 y 절편, x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

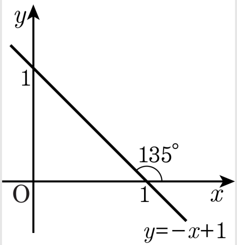
▷ 정답 : 기울기 -1

▷ 정답 : y절편 1

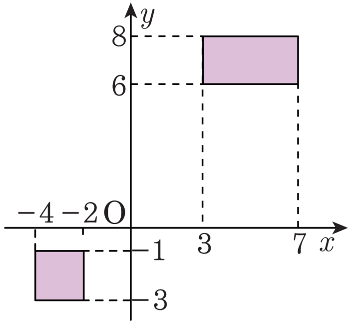
▷ 정답 : x축의 양의 방향 $135°$

해설

기울기 -1, y 절편 1,
x 축의 양의 방향과
이루는 각 $135°$



11. 다음 그림과 같이 좌표평면 위에 정사각형과 직사각형이 놓여 있다. 이 정사각형과 직사각형의 넓이를 동시에 이등분하는 직선의 기울기는?



① $\frac{9}{10}$ ② $\frac{9}{8}$ ③ $\frac{8}{7}$ ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ 1

해설

직사각형 ABCD 에서 두 대각선의 교점을 M이라 하자.
점 M을 지나는 임의의 직선 l 이 직사각형과 만나는 점을 각각 P, Q 라 하면
l의 기울기에 관계없이 $\triangle BMQ = \triangle DMP$ 이므로,
M을 지나는 임의의 직선은 직사각형의 넓이를 이등분한다.
정사각형의 두 대각선의 교점의 좌표는 $(-3, -2)$
직사각형의 두 대각선의 교점의 좌표는 $(5, 7)$ 이므로
두 점을 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{7-(-2)}{5-(-3)} = \frac{9}{8}$$

12. 점 $\mathrm{P}(1, 2)$ 에서 직선 $2x + y - 3 = 0$ 에 내린 수선의 발을 H 라할 때, 수선 PH 의 길이는?

① $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ ② $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ③ $4\sqrt{2}$ ④ 2 ⑤ 3

해설

$(\overline{\mathrm{PH}}$ 의 길이$)$

$=$ (점 $\mathrm{P}(1,\ 2)$ 와 직선 $2x + y - 3 = 0$ 과의 거리)

$$\therefore\ \overline{\mathrm{PH}} = \frac{|2 + 2 - 3|}{\sqrt{4 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

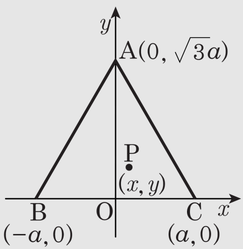
13. 좌표평면 위의 정삼각형 ABC에 대하여 $2\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$ 을 만족시키는 점 P의 자취는 어떤 도형을 그리는가?

① 삼각형 ② 직선 ③ 선분

④ 원 ⑤ 원 아닌 곡선

해설

그림과 같이 변 BC의 중점을 원점으로 하는 좌표축을 설정하고 점 C의 좌표를 $C(a, 0)$이라고 두면, $B(-a, 0)$, $A(0, \sqrt{3}a)$이다.



이 때, 점 P의 좌표를 $P(x, y)$ 라 하면

$2\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$ 이므로

$$2\left\{x^2 + 2(y - \sqrt{3}a)^2\right\}$$

$$= (x+a)^2 + y^2 + (x-a)^2 + y^2$$

정리하여 간단히 하면, $y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}a$

$\therefore$ 직선

14. x, y 에 대한 이차방정식 $x^2+y^2-2kx+2ky+3k^2-4k+2=0$ 이 반지름의 길이가 1 인 원의 방정식일 때, 상수 k 값의 합을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

주어진 방정식을 변형하면

$(x-k)^2+(y+k)^2=-k^2+4k-2 \quad \cdots ㉠$

반지름의 길이가 1 이므로

㉠에서 $-k^2+4k-2=1 \leftarrow r^2=1$

$k^2-4k+3=0, (k-1)(k-3)=0$

$\therefore k=1$ 또는 $k=3$

따라서 합은 4이다.

15. 세 점 $(-1,\ 1)$, $(2,\ 2)$, $(6,\ 0)$을 지나는 원의 중심의 좌표는?

① $(2, 3)$　　② $(-2, 3)$　　③ $(2, -3)$

④ $(-2, -3)$　　⑤ $\left(2, \frac{3}{2}\right)$

해설

세 점 $(-1,\ 1)$, $(2,\ 2)$, $(6,\ 0)$을 지나는 원의 방정식을
$x^2+y^2+ax+by+c=0$ 이라 하면
이 원이 세점을 지나므로
$(-1)^2+1^2-a+b+c=0$
$\therefore a-b-c=2 \cdots\cdots$ ㉠
$2^2+2^2+2a+2b+c=0$
$\therefore 2a+2b+c=-8 \cdots\cdots$ ㉡
$6^2+6a+c=0$
$\therefore 6a+c=-36 \cdots\cdots$ ㉢
㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면
$a=-4,\ b=6,\ c=-12$
즉, $x^2+y^2-4x+6y-12=0$ 이므로
표준형으로 나타내면
$(x-2)^2+(y+3)^2=25$
따라서, 원의 중심의 좌표는 $(2,\ -3)$ 이다.

16. 방정식 $x^2+y^2+4x-6y+k+10=0$ 이 원을 나타내도록 하는 실수 k 의 값의 범위는?

① $k<3$ ② $k>3$ ③ $0<k<3$

④ $k>2$ ⑤ $k<2$

해설

$x^2+y^2+4x-6y+k+10=0$ 을 완전제곱식으로
나타내면 $(x+2)^2+(y-3)^2=3-k$
원이 되려면 반지름이 0 보다 커야 하므로
$\sqrt{3-k}>0,\ 3-k>0 \quad \therefore\ k<3$

17. 점 $(2,\ 1)$ 을 지나고 x 축, y 축에 동시에 접하는 원의 방정식의 반지름의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

원이 점 $(2,\ 1)$ 을 지나고 x 축, y 축에 접하면
제 1 사분면에 위치하므로 반지름이 r 이면
중심이 $(r,\ r)$ 이다.
$(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$ 이고
또한 $(2,\ 1)$ 을 지나므로
$(2-r)^2+(1-r)^2=r^2$,
$(r-1)(r-5)=0$
$\therefore\ r=1$ 또는 5
$\therefore\ (x-1)^2+(y-1)^2=1$ 또는 $(x-5)^2+(y-5)^2=5^2$
$\therefore 1+5=6$

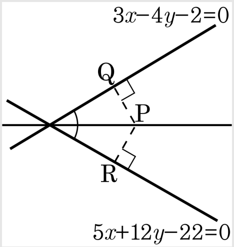
18. 두 직선 $3x-4y-2=0$, $5x+12y-22=0$ 이 이루는 각을 이등분하는 직선의 방정식 중에서 기울기가 양인 직선이 $ax+by+c=0$ 일 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라. (단, a는 양수, a, b, c는 정수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

구하는 각의 이등분선 위의 임의의
점 $\mathrm{P}(X,\ Y)$ 에 대하여 P에서
두 직선에 내린 수선의 발을 각각 Q, R이라 하면



$\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{PR}}$ 이므로

$$\frac{|3X-4Y-2|}{\sqrt{9+16}}=\frac{|5X+12Y-22|}{\sqrt{25+144}}$$

$13(3X-4Y-2)=\pm5(5X+12Y-22)$

즉, $13(3X-4Y-2)=5(5X+12Y-22)$ 또는

$13(3X-4Y-2)=-5(5X+12Y-22)$ 정리하면

$x-8y+6=0$ 또는 $8x+y-17=0$ 에서

기울기가 양이므로

$\therefore\ \ x-8y+6=0$

$\therefore a+b+c=-1$

19. $x^2 + y^2 - 4x + 2ay - 1 = 0$ 이 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭일 때, 상수 a 의 값을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

원의 방정식을 정리하면,
$(x-2)^2 + (y+a)^2 = 5 + a^2$
$y = x$ 에 대칭이려면 원 중심이
$y = x$ 위에 있어야 한다.
$\therefore \quad a = -2$

20. 모든 실수 k 에 대하여 직선 $(1+k)x+y-2k=0$ 에 대칭이고, 반지름의 길이가 3 인 원의 방정식을 구하면?

① $(x+2)^2+(y-2)^2=9$

② $(x-2)^2+(y+2)^2=9$

③ $(x-1)^2+(y-2)^2=9$

④ $(x+1)^2+(y+2)^2=9$

⑤ $(x-1)^2+(y+2)^2=9$

해설

$(1+k)x+y-2k=0$

$x+kx+y-2k=0$ (k 는 임의의 실수)

$x+y+k(x-2)=0$

이 직선은 항상 $(2,\ -2)$ 를 지난다.

따라서 이와 같은 모든 직선에 대칭인 원의 중심은 $(2, -2)$ 이다.

$\therefore (x-2)^2+(y+2)^2=9$

21. 원 $x^2+y^2-4ax+2ay+30a-48=0$ 의 넓이가 최소일 때, 이 원의 중심의 좌표가 (p,q) 이다. 이 때 $p+q$ 의 값은?

① -9 ② -6 ③ -3 ④ 3 ⑤ 6

해설

$x^2+y^2-4ax+2ay+30a-48=0$을

표준형으로 고치면

$(x-2a)^2+(y+a)^2=5a^2-30a+48$

이 원의 넓이는

$\pi(5a^2-30a+48)=5\pi(a-3)^2+3\pi$

따라서 $a=3$ 일 때 넓이가 최소.

중심은 $(6,-3)$

$\therefore p=6,\ q=-3$

$\therefore p+q=3$

22. 중심이 직선 $3x+y=12$ 의 제 1 사분면 위에 있고, x 축과 y 축에 동시에 접하는 원의 방정식의 중심이 (a,b) 일 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

구하는 원의 반지름의 길이를 r 라 하면
중심의 좌표는 $(r,\ r)$ 이다.
따라서, 구하는 원의 방정식을
$(x-r)^2+(y-r)^2=r^2 \quad \cdots\cdots ㉠$
한편, 점 $(r,\ r)$ 는 직선 $3x+y=12$ 위에 있으므로 $3r+r=12$
$\therefore\ r=3$
따라서, 구하는 원의 방정식은 ㉠에서 $(x-3)^2+(y-3)^2=3^2$