

1. $2 \leq x \leq 3$ 일 때, $\frac{2x}{1-x}$ 의 범위는?

① $-4 \leq \frac{2x}{1-x} \leq -3$

② $-4 \leq \frac{2x}{1-x} \leq -2$

③ $-4 \leq \frac{2x}{1-x} \leq -1$

④ $1 \leq \frac{2x}{1-x} \leq 2$

⑤ $1 \leq \frac{2x}{1-x} \leq 3$

해설

$$\frac{2x}{1-x} = \frac{-2(-x+1)+2}{-x+1} = -2 + \frac{2}{-x+1}$$

$2 \leq x \leq 3$ 에서 -1 을 곱하면 $-2 \geq -x \geq -3$

1 을 더하면 $-1 \geq -x+1 \geq -2$

역수를 취하면 $\frac{1}{-1} \leq \frac{1}{-x+1} \leq \frac{1}{-2}$

2 를 곱하면 $-2 \leq \frac{2}{-x+1} \leq -1$

-2 를 더하면 $-4 \leq -2 + \frac{2}{-x+1} \leq -3$ 에서 $-4 \leq \frac{2x}{1-x} \leq -3$

2. 수직선 위의 두 점 A(5), B(-2) 사이의 거리를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$$\overline{AB} = \overline{BA} = |5 - (-2)| = |7| = 7$$

3. 두 점 (3, 1), (4, 3)을 지나는 직선의 방정식의 기울기와 y 절편의 합은?

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

$y = ax + b$
(3, 1) 대입 $\Rightarrow 1 = 3a + b$
(4, 3) 대입 $\Rightarrow 3 = 4a + b$
두 식을 연립하면, $a = 2, b = -5$
 $y = 2x - 5$
기울기 : 2, y 절편 : -5

4. 연립부등식 $\begin{cases} x^2 + 3x - 4 < 0 \\ (x - a)(x + 2) > 0 \end{cases}$ 의 해가 $-2 < x < 1$ 이 될 때, 실수 a 의 최댓값은?

① 0 ② -2 ③ -4 ④ -6 ⑤ -8

해설

$x^2 + 3x - 4 < 0$ 의 해가
 $-4 < x < 1$ 이므로
연립부등식의 해가 $-2 < x < 1$ 가 되려면
 $(x - a)(x + 2) > 0$ 의 해는
 $x < a, x > -2$ 이고, $a \leq -4$ 이다.

5. 다음 원 $x^2 + y^2 = 9$ 와 직선 $y = x + 5$ 의 교점의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▷ 정답 : 0 개

해설

원의 중심과 직선 사이의 거리를 구해보면,

$$\frac{|5|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} > 3$$

반지름보다 크므로 원과 직선은 만나지 않는다.

6. 다음은 원 $x^2 + y^2 = r^2$ 에 대하여 기울기가 m 인 접선의 방정식을 구하는 과정이다.

원 $x^2 + y^2 = r^2$ 에 접하고 기울기가 m 인
접선의 방정식을 $y = mx + k$ 라 하자.
직선 $y = mx + k$ 를 원의 방정식
 $x^2 + y^2 = r^2$ 에 대입하여 정리하면,
 $(1 + m^2)x^2 + 2mkx + \boxed{(가)}$ $= 0$
이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 원과 직선이 접하므로
 $D = 0$ 에서
 $k = \pm \boxed{(나)}$
따라서 구하는 접선의 방정식은
 $y = mx \pm \boxed{(나)}$

(가), (나)에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

- ① $r^2 - k^2, r\sqrt{m^2 + 1}$
- ② $r^2 - k^2, r\sqrt{m^2 - 1}$
- ③ $k^2 - r^2, \sqrt{m^2 + 1}$
- ④ $k^2 - r^2, r\sqrt{m^2 + 1}$
- ⑤ $k^2 - r^2, r\sqrt{m^2 - 1}$

해설

직선 $y = mx + k$ 를 원의 방정식 $x^2 + y^2 = r^2$ 에
대입하면, $x^2 + (mx + k)^2 = r^2$
 $(1 + m^2)x^2 + 2mkx + k^2 - r^2 = 0$
이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면,
 $\frac{D}{4} = m^2k^2 - (1 + m^2)(k^2 - r^2) = m^2r^2 + r^2 - k^2$
원과 직선이 접하므로 $D = 0$,
즉 $r^2(m^2 + 1) = k^2, k = \pm r\sqrt{m^2 + 1}$
따라서 구하는 접선의 방정식은
 $y = mx \pm r\sqrt{m^2 + 1}$
 $\therefore (가) : k^2 - r^2, (나) : r\sqrt{m^2 + 1}$

7. 점(1,3)을 점(-1,2)에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 구하면?

① (3, -1)

② (-3, 1)

③ (1, -3)

④ (-1, 3)

⑤ (-1, -3)

해설

대칭이동한 점을 (a,b) 라고 하면

점 (a,b) 와 점 $(1,3)$ 의 중점이

점 $(-1,2)$ 이므로

$\frac{a+1}{2} = -1, \frac{b+3}{2} = 2$ 에서

$a = -3, b = 1$

$\therefore (-3, 1)$

8. 다음은 $\triangle ABC$ 의 세 변의 수직이등분선이 한 점에서 만남을 보인 것이다.

직선 BC를 x 축, 변 BC의 수직이등분선을 y 축으로 잡고, $A(a, b), B(-c, 0), C(c, 0)$ 라고 하자. (단, $b \neq 0, c > 0$)
 (i) $a \neq c$ 이고 $a \neq -c$ 일 때 직선 AC의 기울기는 $\frac{b}{a-c}$ 이므로, 변 AC의 중점 E를 지나고 변 AC에 수직인 직선의 방정식은 $y = \frac{\text{(가)}}{\text{(가)}} \left(x - \frac{a+c}{2} \right) + \frac{b}{2}$
 $= \frac{\text{(가)}}{\text{(가)}} x + \frac{\text{(나)}}{\text{(나)}} \dots\dots \textcircled{\text{㉠}}$
 같은 방법으로, 변 AB의 중점 D를 지나고 변 AB에 수직인 직선의 방정식은 $y = -\frac{a+c}{b} x + \frac{\text{(나)}}{\text{(나)}} \dots\dots \textcircled{\text{㉡}}$
 두 직선 $\textcircled{\text{㉠}}, \textcircled{\text{㉡}}$ 의 y 절편이 같으므로 세 변의 수직이등분선은 y 축 위의 점 $(0, \frac{\text{(나)}}{\text{(나)}})$ 에서 만난다. 따라서 $\triangle ABC$ 의 세 변의 수직이등분선은 한 점에서 만난다.
 (ii) $a = c$ 또는 $a = -c$ 일 때 $\triangle ABC$ 는 $\frac{\text{(다)}}{\text{(다)}}$ 이므로 세 변의 수직이등분선은 D 또는 E에서 만난다.
 따라서 $\triangle ABC$ 의 세 변의 수직이등분선은 한 점에서 만난다.

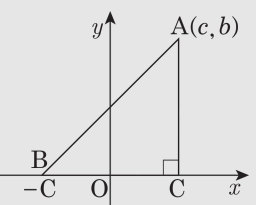
위

의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

- ① $-\frac{a-c}{b}, \frac{a^2+b^2-c^2}{2b}$, 직각삼각형
- ② $-\frac{a-c}{b}, \frac{2b}{a^2+b^2-c^2}$, 정삼각형
- ③ $-\frac{a-c}{b}, \frac{2b}{-a^2+b^2-c^2}$, 이등변삼각형
- ④ $\frac{a-c}{b}, \frac{a^2+b^2-c^2}{2b}$, 이등변삼각형
- ⑤ $\frac{a-c}{b}, \frac{-a^2+b^2-c^2}{2b}$, 직각삼각형

해설

직선 AC의 기울기가 $\frac{b}{a-c}$ 이므로 변 AC에 수직인 직선의 기울기를 m 이라 하면 $\frac{b}{a-c} \cdot m = -1$ 에서 $m = -\frac{a-c}{b}$ 이다.



이때, 중점 E $\left(\frac{a+c}{2}, \frac{b}{2} \right)$ 이므로 변

$$\begin{aligned} \text{AC에 수직인 직선의 방정식은} \\ y &= \left[-\frac{a-c}{b} \right] \left(x - \frac{a+c}{2} \right) + \frac{b}{2} \\ &= -\frac{a-c}{b} x + \frac{2b}{a^2-c^2} + \frac{b}{2} \\ &= \left[-\frac{a-c}{b} \right] x + \left[\frac{a^2+b^2-c^2}{2b} \right] \end{aligned}$$

즉, (가), (나)에 들어갈 것은 차례로 $-\frac{a-c}{b}, \frac{a^2+b^2-c^2}{2b}$ 이다.
 한편, $a = c$ 또는 $a = -c$ 일 때는 다음 그림에서 보면 $\triangle ABC$ 는 직각삼각형이다.

9. 두 직선 $(a+1)x + (a^2+a+2)y = 3a-1$, $ax + (a^2-a+2)y = a^2$ 이
공유점을 갖지 않을 때, a 의 값은?

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

두 직선이 공유점을 갖지 않는다는 것은

두 직선이 평행일 때이므로,

$$\frac{a}{a+1} = \frac{a^2-a+2}{a^2+a+2} \neq \frac{a^2}{3a-1}$$

$$a(a^2+a+2) = (a+1)(a^2-a+2)$$

$$a^2+a-2=0$$

$$(a+2)(a-1)=0 \quad \therefore a=-2, 1$$

이 때, $a=1$ 은 조건에 맞지 않으므로,

$$\therefore a=-2$$

10. 이차방정식 $x^2 - ax + a^2 - 4 = 0$ 의 서로 다른 두 실근 α, β 가 $\alpha < 0 < \beta$ 을 만족할 때, a 의 범위를 구하면?

① $a > 2$ 또는 $a < -2$

② $-\frac{4}{\sqrt{3}} < a < \frac{4}{\sqrt{3}}$

③ $a > \frac{4}{\sqrt{3}}$ 또는 $a < -\frac{4}{\sqrt{3}}$

④ $-2 < a < 2$

⑤ $2 < a < \frac{4}{\sqrt{3}}$ 또는 $-\frac{4}{\sqrt{3}} < a < -2$

해설

i) 두 실근을 가지려면 판별식이 0보다 크다.

$$\Rightarrow D = a^2 - 4(a^2 - 4) > 0$$

$$\Rightarrow -\frac{4}{\sqrt{3}} < a < \frac{4}{\sqrt{3}}$$

ii) 두 근이 $\alpha < 0 < \beta$ 이라면

$x = 0$ 을 대입한 값이 0보다 작아야 한다.

$$\Rightarrow a^2 - 4 < 0$$

$$\Rightarrow -2 < a < 2$$

i), ii)의 공통 범위: $-2 < a < 2$