1. $2 \le x \le 3$ 일 때, $\dfrac{2x}{1-x}$ 의 범위는?

① $-4 \le \dfrac{2x}{1-x} \le -3$
② $-4 \le \dfrac{2x}{1-x} \le -2$
③ $-4 \le \dfrac{2x}{1-x} \le -1$
④ $1 \le \dfrac{2x}{1-x} \le 2$
⑤ $1 \le \dfrac{2x}{1-x} \le 3$

해설

$$\frac{2x}{1-x} = \frac{-2(-x+1)+2}{-x+1} = -2 + \frac{2}{-x+1}$$

$2 \le x \le 3$ 에서 -1 을 곱하면 $-2 \ge -x \ge -3$

1 을 더하면 $-1 \ge -x+1 \ge -2$

역수를 취하면 $\dfrac{1}{-1} \le \dfrac{1}{-x+1} \le \dfrac{1}{-2}$

2 를 곱하면 $-2 \le \dfrac{2}{-x+1} \le -1$

-2 를 더하면 $-4 \le -2 + \dfrac{2}{-x+1} \le -3$ 에서 $-4 \le \dfrac{2x}{1-x} \le -3$

2. 수직선 위의 두 점 $A(5)$, $B(-2)$ 사이의 거리를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$$\overline{AB} = \overline{BA} = |5-(-2)| = |7| = 7$$

3. 두 점 $(3, 1), (4, 3)$ 을 지나는 직선의 방정식의 기울기와 y 절편의 합은?

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

$y = ax + b$

$(3, 1)$ 대입 $\Rightarrow 1 = 3a + b$

$(4, 3)$ 대입 $\Rightarrow 3 = 4a + b$

두 식을 연립하면, $a = 2,\ b = -5$

$y = 2x - 5$

기울기 : 2 , y 절편 : -5

4. 연립부등식 $\begin{cases} x^2+3x-4<0 \\ (x-a)(x+2)>0 \end{cases}$ 의 해가 $-2<x<1$이 될 때, 실수 a의 최댓값은?

① 0 ② -2 ③ -4 ④ -6 ⑤ -8

해설

$x^2+3x-4<0$의 해가
$-4<x<1$이므로
연립부등식의 해가 $-2<x<1$가 되려면
$(x-a)(x+2)>0$의 해는
$x<a, x>-2$이고, $a\le-4$이다.

5. 다음 원 $x^2+y^2=9$와 직선 $y=x+5$ 의 교점의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 0 개

해설

원의 중심과 직선 사이의 거리를 구해보면,

$$\frac{|5|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}>3$$

반지름보다 크므로 원과 직선은 만나지 않는다.

6. 다음은 원 $x^2+y^2=r^2$ 에 대하여 기울기가 m 인 접선의 방정식을 구하는 과정이다.

> 원 $x^2+y^2=r^2$ 에 접하고 기울기가 m 인
> 접선의 방정식을 $y=mx+k$ 라 하자.
> 직선 $y=mx+k$ 를 원의 방정식
> $x^2+y^2=r^2$ 에 대입하여 정리하면,
> $(1+m^2)x^2+2mkx+\boxed{(가)}=0$
> 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 원과 직선이 접하므로
> $D=0$ 에서
> $k=\pm\boxed{(나)}$
> 따라서 구하는 접선의 방정식은
> $y=mx\pm\boxed{(나)}$

(가), (나) 에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

① $r^2-k^2,\ r\sqrt{m^2+1}$
② $r^2-k^2,\ r\sqrt{m^2-1}$
③ $k^2-r^2,\ \sqrt{m^2+1}$
④ $k^2-r^2,\ r\sqrt{m^2+1}$
⑤ $k^2-r^2,\ r\sqrt{m^2-1}$

해설

직선 $y=mx+k$ 를 원의 방정식 $x^2+y^2=r^2$ 에
대입하면, $x^2+(mx+k)^2=r^2$
$(1+m^2)x^2+2mkx+k^2-r^2=0$
이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면,
$\frac{D}{4}=m^2k^2-(1+m^2)(k^2-r^2)=m^2r^2+r^2-k^2$
원과 직선이 접하므로 $D=0$,
즉$r^2(m^2+1)=k^2$, $k=\pm r\sqrt{m^2+1}$
따라서 구하는 접선의 방정식은
$y=mx\pm r\sqrt{m^2+1}$
$\therefore$ (가) : k^2-r^2, (나) : $r\sqrt{m^2+1}$

7. 점$(1,3)$을 점$(-1,2)$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 구하면?

① $(3,\ -1)$ ② $(-3,\ 1)$ ③ $(1,\ -3)$

④ $(-1,\ 3)$ ⑤ $(-1,\ -3)$

해설

대칭이동한 점을 (a,b)라고 하면
점 (a,b)와 점 $(1,3)$의 중점이
점 $(-1,2)$이므로

$\dfrac{a+1}{2}=-1, \dfrac{b+3}{2}=2$에서

$a=-3, b=1$

$\therefore (-3,\ 1)$

8. 다음은 $\triangle$ABC의 세 변의 수직이등분선이 한 점에서 만남을 보인 것이다.

> 직선 BC를 x축, 변 BC의 수직이등분선을 y축으로 잡고, A$(a,\ b)$, B$(-c,\ 0)$, C$(c,\ 0)$라고 하자. (단, $b \neq 0,\ c > 0$)
>
> (ⅰ) $a \neq c$이고 $a \neq -c$일 때 직선 AC의 기울기는 $\dfrac{b}{a-c}$이므로, 변 AC의 중점 E를 지나고 변 AC에 수직인 직선의 방정식은
>
> $$y = \boxed{\text{(가)}}\left(x - \frac{a+c}{2}\right) + \frac{b}{2}$$
> $$= \boxed{\text{(가)}}\,x + \boxed{\text{(나)}} \quad \cdots\cdots ㉠$$
>
> 같은 방법으로, 변 AB의 중점 D를 지나고 변 AB에 수직인 직선의 방정식은
>
> $$y = -\frac{a+c}{b}x + \boxed{\text{(나)}} \quad \cdots\cdots ㉡$$
>
> 두 직선 ㉠, ㉡의 y절편이 같으므로 세 변의 수직이등분선은 y축 위의 점 $\left(0,\ \boxed{\text{(나)}}\right)$에서 만난다. 따라서 $\triangle$ABC의 세 변의 수직이등분선은 한 점에서 만난다.
>
> (ⅱ) $a = c$ 또는 $a = -c$일 때
>
> $\triangle$ABC는 $\boxed{\text{(다)}}$이므로 세 변의 수직이등분선은 D 또는 E에서 만난다.
>
> 따라서 $\triangle$ABC의 세 변의 수직이등분선은 한 점에서 만난다.

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

① $-\dfrac{a-c}{b}$, $\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2b}$, 직각삼각형

② $-\dfrac{a-c}{b}$, $\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2b}$, 정삼각형

③ $-\dfrac{a-c}{b}$, $\dfrac{-a^2+b^2-c^2}{2b}$, 이등변삼각형

④ $\dfrac{a-c}{b}$, $\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2b}$, 이등변삼각형

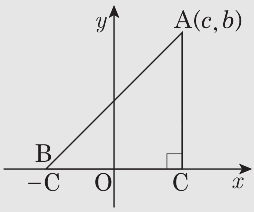
⑤ $\dfrac{a-c}{b}$, $\dfrac{-a^2+b^2-c^2}{2b}$, 직각삼각형

해설

직선 AC의 기울기가 $\dfrac{b}{a-c}$이므로

변 AC에 수직인 직선의 기울기를 m이라 하면 $\dfrac{b}{a-c}\cdot m = -1$에서 $m = -\dfrac{a-c}{b}$

이다.



이때, 중점 E$\left(\dfrac{a+c}{2},\ \dfrac{b}{2}\right)$이므로 변 AC에 수직인 직선의 방정식은

$$y = \left[-\frac{a-c}{b}\right]\left(x - \frac{a+c}{2}\right) + \frac{b}{2}$$
$$= -\frac{a-c}{b}x + \frac{a^2-c^2}{2b} + \frac{b}{2}$$
$$= \left[-\frac{a-c}{b}\right]x + \left[\frac{a^2+b^2-c^2}{2b}\right]$$

즉, (가), (나)에 들어갈 것은 차례로 $-\dfrac{a-c}{b}$, $\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2b}$이다.

한편, $a = c$ 또는 $a = -c$일 때는 다음 그림에서 보면 $\triangle$ABC는 직각삼각형이다.

9. 두 직선 $(a+1)x+(a^2+a+2)y=3a-1,\ ax+(a^2-a+2)y=a^2$ 이 공유점을 갖지 않을 때, a의 값은?

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

두 직선이 공유점을 갖지 않는다는 것은
두 직선이 평행일 때이므로,

$$\frac{a}{a+1}=\frac{a^2-a+2}{a^2+a+2}\neq\frac{a^2}{3a-1}$$

$$a(a^2+a+2)=(a+1)(a^2-a+2)$$

$$a^2+a-2=0$$

$$(a+2)(a-1)=0 \quad \therefore\ a=-2,\ 1$$

이 때, $a=1$은 조건에 맞지 않으므로,

$$\therefore\ a=-2$$

10. 이차방정식 $x^2-ax+a^2-4=0$의 서로 다른 두 실근 α, β가 $\alpha<0<\beta$을 만족할 때, a의 범위를 구하면?

① $a>2$ 또는 $a<-2$

② $-\frac{4}{\sqrt{3}}<a<\frac{4}{\sqrt{3}}$

③ $a>\frac{4}{\sqrt{3}}$ 또는 $a<-\frac{4}{\sqrt{3}}$

④ $-2<a<2$

⑤ $2<a<\frac{4}{\sqrt{3}}$ 또는 $-\frac{4}{\sqrt{3}}<a<-2$

해설

ⅰ) 두 실근을 가지려면 판별식이 0보다 크다.

$\Rightarrow D=a^2-4(a^2-4)>0$

$\Rightarrow -\frac{4}{\sqrt{3}}<a<\frac{4}{\sqrt{3}}$

ⅱ) 두 근이 $\alpha<0<\beta$이려면

$x=0$을 대입한 값이 0보다 작아야 한다.

$\Rightarrow a^2-4<0$

$\Rightarrow -2<a<2$

ⅰ), ⅱ)의 공통 범위: $-2<a<2$