

1. x 가 정수일 때, $|x - 2| \leq 5, x < 3$ 를 동시에 만족하는 x 의 값을 모두 더하면?

① -7

② -5

③ -3

④ -1

⑤ 0

해설

$$|x - 2| \leq 5 \leftrightarrow -3 \leq x \leq 7$$

x 는 $-3 \leq x < 3$ 인 정수

-3, -2, -1, 0, 1, 2

2. 수직선 위의 두 점 $A(-2)$, $B(4)$ 에 대하여 $P(-5)$ 일 때, $\overline{PA} + \overline{PB}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 12

해설

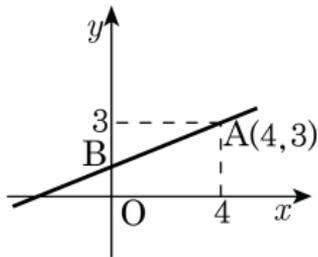
수직선 위의 두 점 사이의 거리 공식을 이용하여 $\overline{PA} + \overline{PB}$ 를 구한다.

$A(-2), B(4), P(-5)$ 에 대하여

$$\overline{PA} = |-5 - (-2)| = 3, \overline{PB} = |-5 - 4| = 9$$

$$\therefore \overline{PA} + \overline{PB} = 3 + 9 = 12$$

3. 기울기가 $\frac{1}{2}$ 이고, 점 A(4, 3) 을 지나는 직선이 y 축과 만나는 점을 B(0, k) 라 할 때, 상수 k 의 값을 구하시오.



▶ 답:

▷ 정답: $k = 1$

해설

두 점 A, B 를 지나는 직선의 기울기가 $\frac{1}{2}$ 이므로

$$(\text{기울기}) = \frac{3 - k}{4 - 0} = \frac{1}{2}$$

따라서 $k = 1$

4. 모든 실수 x 에 대하여 부등식 $ax^2 + 2ax + 3 > 0$ 이 성립하도록 하는 정수 a 의 개수는?

① 1개

② 2개

③ 3개

④ 4개

⑤ 5개

해설

x 의 계수가 미지수이므로

i) $a = 0$ 일 때,

$3 > 0$ 이므로 모든 실수 x 에 대하여 항상 성립한다.

ii) $a \neq 0$ 일 때,

$ax^2 + 2ax + 3 > 0$ 의 해가 모든 실수이려면

$$a > 0 \cdots \textcircled{\Gamma}$$

$$\frac{D}{4} = a^2 - 3a < 0, a(a - 3) < 0$$

$$\therefore 0 < a < 3 \cdots \textcircled{\Delta}$$

$\textcircled{\Gamma}$, $\textcircled{\Delta}$ 의 공통 범위를 구하면 $0 < a < 3$

i), ii)에서 $0 \leq a < 3$

따라서 정수 a 는 0, 1, 2의 3개이다.

5. $2x - 1 > 0$, $x^2 - 3x - 4 < 0$ 를 동시에 만족하는 x 중에서 정수인 것의 개수는?

① 0개

② 1개

③ 2개

④ 3개

⑤ 4개

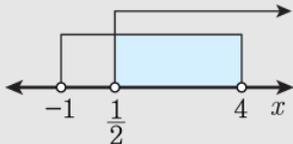
해설

$$2x - 1 > 0$$

$$\therefore x > \frac{1}{2} \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$(x + 1)(x - 4) < 0$$

$$\therefore -1 < x < 4 \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$



$\textcircled{㉠}$, $\textcircled{㉡}$ 의 공통 부분은

$$\therefore \frac{1}{2} < x < 4$$

따라서 x 중에서

정수인 것은 1, 2, 3의 3개다.

6. 길이가 6인 선분을 같은 방향으로 2 : 1로 내분하는 점과 외분하는 점 사이의 거리를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 8

해설

길이가 6인 선분을 OA라 하고,
O를 원점으로 잡으면 A의 좌표는 (6, 0)
이 선분을 2 : 1로 내분하는 점 P(x_1)라 하면

$$x_1 = \frac{2 \times 6 + 1 \times 0}{2 + 1} = 4$$

2 : 1로 외분하는 점 Q(x_2)라 하면

$$x_2 = \frac{2 \times 6 - 1 \times 0}{2 - 1} = 12$$

따라서 $\overline{PQ} = 12 - 4 = 8$

7. 두 점 (1, 2), (2, 1)을 지나고, x 축에 접하는 원은 두 개있다. 두 원의 중심 사이의 거리는?

① 4

② 5

③ $4\sqrt{2}$

④ 6

⑤ $4\sqrt{3}$

해설

그 원을 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = b^2$ 이라 하면

(1, 2), (2, 1)을 지나므로

$$(1-a)^2 + (2-b)^2 = b^2, (2-a)^2 + (1-b)^2 = b^2$$

$$1 - 2a + a^2 + 4 - 4b = 0 \cdots \textcircled{A}$$

$$4 - 4a + a^2 + 1 - 2b = 0 \cdots \textcircled{B}$$

$$\textcircled{B} \times 2 - \textcircled{A}$$

$$a^2 - 6a + 5 = 0, (a-1)(a-5) = 0$$

$$\therefore a = 1 \text{ 또는 } a = 5$$

i) $a = 1$ 이면 ① 에서 $b = 1$

ii) $a = 5$ 이면 ① 에서 $b = 5$

\therefore 두 원의 중심은 (1, 1), (5, 5) 이다.

중심거리

$$= \sqrt{(5-1)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

8. 세 변의 길이가 $x-1$, x , $x+1$ 인 삼각형이 둔각삼각형이 되도록 하는 x 의 값의 범위가 $a < x < b$ 라 할 때, 방정식 $ax^2 - 3x + b = 0$ 의 두 근의 곱은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$x-1$, x , $x+1$ 은 삼각형의 세 변이므로

$$x-1 > 0, x > 0, x+1 > 0, x-1+x > x+1 \therefore x > 2 \dots\dots \textcircled{㉠}$$

한편, 둔각삼각형이 되려면

$$(x-1)^2 + x^2 < (x+1)^2$$

$$x^2 - 4x < 0 \text{에서 } 0 < x < 4 \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{에서 } 2 < x < 4$$

$$\therefore a = 2, b = 4$$

따라서 $ax^2 - 3x + b = 0$ 의 두 근의 곱은

$$\frac{b}{a} = \frac{4}{2} = 2$$

9. 점 $(3, -1)$ 에서 원 $x^2 + y^2 = 5$ 에 그은 접선의 방정식 중 기울기가 음수인 것의 y 절편을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

점 $(3, -1)$ 을 지나고 접선의 기울기를 m 이라고 하면

$$\text{접선은 } y + 1 = m(x - 3) \cdots \textcircled{1}$$

따라서 원의 중심 $(0, 0)$ 에서 직선

$$mx - y - 3m - 1 = 0 \text{ 과의 거리가}$$

원의 반지름 $\sqrt{5}$ 와 같다.

$$\frac{|-3m - 1|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \sqrt{5}, \quad |-3m - 1| = \sqrt{5} \sqrt{m^2 + 1}$$

양변을 제곱하면

$$9m^2 + 6m + 1 = 5m^2 + 5, \quad 4m^2 + 6m - 4 = 0$$

$$\text{따라서, 기울기 } m = \frac{1}{2}, -2$$

여기서 기울기가 음수인 -2 를 ①에 대입하면

$$y = -2x + 5$$

따라서 y 절편은 5이다.

10. $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$ 인 원을 x 축 방향으로 a 만큼 y 축 방향으로 b 만큼 평행이동 하면, 처음 원과 외접한다고 할 때, a, b 사이의 관계식은?

① $a^2 + b^2 = 1$

② $a^2 + b^2 = 4$

③ $a^2 + b^2 = 9$

④ $a^2 + b^2 = 16$

⑤ $a^2 + b^2 = 25$

해설

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 4 \cdots \textcircled{㉠}$$

원 ㉠을 x 축의 방향으로 a 만큼,

y 의 방향으로 b 만큼 평행이동하면

$$\{(x-a)-1\}^2 + \{(y-b)+2\}^2 = 4$$

$$\{x-(a+1)\}^2 + \{y-(b-2)\}^2 = 4 \cdots \textcircled{㉡}$$

원 ㉠과 원 ㉡이 외접하므로 중심거리 d 와 두 원 ㉠, ㉡의 반지름의 길이의 합이 서로 같아야 한다.

$$\therefore d = \sqrt{(a+1-1)^2 + (b-2+2)^2}$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2} = 2 + 2 = 4$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 16$$