

1. 세 실수 a, b, c 에 대하여 다음 중 항상 옳은 것은?

- ① $a > b$ 이면 $a^2 > b^2$
- ② $a > b$ 이면 $a - c < b - c$
- ③ $a < b < 0$ 이면 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$
- ④ $ac > bc$ 이면 $a > b, c > 0$
- ⑤ $a^2 + b^2 + c^2 \leq ab + bc + ca$

해설

- ① $a > 0 > b$ 인 경우에서 $|b| > |a|$ 라면 제곱 값에 대해서는 $b^2 > a^2$ 의 결과가 나온다.
- ② 부등식의 기본 성질로 양변에 같은 수를 빼서는 부호가 바뀌지 않는다.
- ④ $a > b, c > 0$ 이면 $ac > bc$ 일 수는 있으나 보기 ④번 같은 경우에는 $ac > bc$ 이면 $a < b, c < 0$ 인 경우도 있기 때문에 성립하지 않는다.
- ⑤ 주어진 식의 양변에 2를 곱하고 좌변으로 몰아 정리하면
$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca \geq 0$$
$$(a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 2bc + c^2) + (c^2 - 2ca + a^2) \geq 0$$
$$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0$$
위와 같이 되므로 세 실수 사이의 관계가
$$a - b = 0, b - c = 0, c - a = 0$$
을 성립하지 않으면 성립하지 않는 보기이다.

2. 연립부등식 $\begin{cases} x^2 - 4x - 5 \leq 0 \\ 2x^2 - 5x < 3 \end{cases}$ 의 해 중에서

정수인 것의 개수는?

- ① 0 개 ② 1 개 ③ 2 개 ④ 3 개 ⑤ 4 개

해설

$$x^2 - 4x - 5 \leq 0 \iff (x+1)(x-5) \leq 0$$

$$\therefore -1 \leq x \leq 5 \dots\dots \textcircled{\text{㉠}}$$

$$2x^2 - 5x < 3 \iff 2x^2 - 5x - 3 < 0$$

$$\iff (2x+1)(x-3) < 0$$

$$\therefore -\frac{1}{2} < x < 3 \dots\dots \textcircled{\text{㉡}}$$

$$\textcircled{\text{㉠}}, \textcircled{\text{㉡}} \text{의 공통 범위는 } -\frac{1}{2} < x < 3$$

따라서, 정수인 것은 0, 1, 2로 3개다.

3. 좌표평면 위의 네 점 A(-3, -3), B(3, -3), C(3, 5), D(-3, 5)를 꼭짓점으로 하는 직사각형 ABCD가 있다. ABCD의 넓이를 이등분하는 직선이 항상 지나는 점E의 좌표는?

- ① (-4, 0)
- ② (0, 1)
- ③ (0, 2)
- ④ (1, 2)
- ⑤ (4, 3)

해설

좌표평면 위에 네 점 A, B, C, D를 그리면
대각선의 교점은 AC의 중점이다.

$$\left(\frac{-3+3}{2}, \frac{-3+5}{2}\right) = (0, 1)$$

따라서 ABCD의 넓이를 이등분하는 직선은
항상(0, 1)을 지난다.

4. 직선 $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + 1$ 과 점 $(0, 1)$ 에서 수직으로 만나는 직선의 방정식을 $y = mx + n$ 이라 할 때, $m^2 + n$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + 1$ 과 수직인 직선이므로

기울기 m 은 $\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot m = -1$

$\therefore m = -\sqrt{3}$

따라서 $y = -\sqrt{3}x + 1$ 이므로 $n = 1$

$\therefore m^2 + n = 4$

5. 점 P(1, 2) 를 점 P'(-1, 4) 로 옮기는 평행이동에 의하여 점 (3, -2) 는 어떤 점으로 옮겨 지는가?

① (1, 1)

② (1, -1)

③ (1, 0)

④ (-1, 1)

⑤ (0, 1)

해설

x 축 방향으로 -2 만큼, y 축 방향으로 2 만큼 평행이동
 $(3 - 2, -2 + 2) = (1, 0)$

6. 연립부등식 $\begin{cases} 3x-2 \leq x+a \\ 2x-b \leq 3x \end{cases}$ 의 해가 4 일 때, $a-b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$$\begin{cases} 3x-2 \leq x+a & \cdots \textcircled{1} \\ 2x-b \leq 3x & \cdots \textcircled{2} \end{cases} \text{이라 하면}$$

$$\textcircled{1}\text{에서 } x \leq \frac{a+2}{2}$$

$$\textcircled{2}\text{에서 } x \geq -b$$

$$\therefore -b \leq x \leq \frac{a+2}{2}$$

이 부등식의 해가 4 이려면 $4 \leq x \leq 4$ 이어야 하므로

$$-b = 4 \text{ 에서 } b = -4, \frac{a+2}{2} = 4 \text{ 에서 } a = 6$$

따라서 $a-b = 6 - (-4) = 10$ 이다.

7. 연립부등식 $\begin{cases} x^2 + 3x - 4 < 0 \\ x^2 - 2x - 3 > 0 \end{cases}$ 의 값은?

① $x > -1$

② $-4 < x < -1$

③ $0 < x < 4$

④ $1 < x < 4$

⑤ $-4 < x < 3$

해설

$$x^2 + 3x - 4 < 0 \Rightarrow (x - 1)(x + 4) < 0 \\ \Rightarrow -4 < x < 1$$

$$x^2 - 2x - 3 > 0 \Rightarrow (x + 1)(x - 3) > 0 \\ \Rightarrow x < -1 \text{ 또는 } x > 3$$

∴ 공통부분을 구하면 $-4 < x < -1$

8. 두 점 A(1),B(5)에 대하여 선분 AB를 3 : 1로 내분하는 점 P와 선분 AB를 3 : 1로 외분하는 점 Q 사이의 거리를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$\frac{3 \times 5 + 1 \times 1}{3 + 1} = 4$$

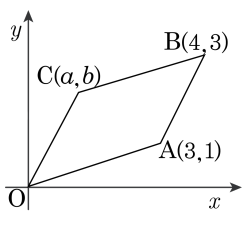
∴ P(4)

$$\frac{3 \times 5 - 1 \times 1}{3 - 1} = 7$$

∴ Q(7)

$$\therefore PQ = |7 - 4| = 3$$

9. 다음 그림과 같이 네 점 A(3, 1), B(4, 3), C(a , b), O(0, 0)을 꼭짓점으로 하는 평행사변형 OABC에서 $a + b$ 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

평행사변형 OABC에서 두 대각선의 중점은 일치하므로

$$\left(2, \frac{3}{2}\right) = \left(\frac{a+3}{2}, \frac{b+1}{2}\right)$$

$$\frac{a+3}{2} = 2 \text{에서 } a = 1$$

$$\frac{b+1}{2} = \frac{3}{2} \text{에서 } b = 2$$

$$\therefore a + b = 3$$

10. 좌표평면 위의 정삼각형 ABC에 대하여 $2\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$ 을 만족시키는 점 P의 자취는 어떤 도형을 그리는가?
- ① 삼각형

② 직선

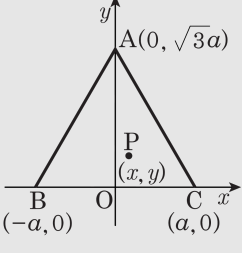
③ 선분

④ 원

⑤ 원 아닌 곡선

해설

그림과 같이 변 BC의 중점을 원점으로 하는 좌표축을 설정하고 점 C의 좌표를 $C(a,0)$ 이라고 두면, $B(-a,0)$, $A(0, \sqrt{3}a)$ 이다.



이 때, 점 P의 좌표를 $P(x,y)$ 라 하면

$$2\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 \text{ 이므로}$$
$$2\{x^2 + 2(y - \sqrt{3}a)^2\}$$
$$= (x+a)^2 + y^2 + (x-a)^2 + y^2$$

정리하여 간단히 하면, $y = \frac{\sqrt{3}}{3}a$

∴ 직선

11. 원 $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 1 = 0$ 과 같은 중심을 갖고, 점 $(1, 2)$ 를 지나는 원의 반지름을 r 이라 할 때, r^2 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 26

해설

준 식에서 $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 14$ 이므로

중심은 $(2, -3)$ 이다.

구하는 원의 반지름을 r 라 하면

$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = r^2$ 이고,

이 원이 점 $(1, 2)$ 를 지나므로

$(1 - 2)^2 + (2 + 3)^2 = r^2$

$\therefore r^2 = 26$

12. 두 원 $(x+1)^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 2 = 0$ 의 공통접선의 개수는?

① 0 개 ② 1 개 ③ 2 개 ④ 3 개 ⑤ 4 개

해설

$(x+1)^2 + y^2 = 1$ 에서 이 원의 중심을 C_1 이라

하면 점 C_1 의 좌표는 $(-1, 0)$ 이고

반지름의 길이는 1 이다.

$x^2 + y^2 - 6x - 6y + 2 = 0$ 에서

$(x-3)^2 + (y-3)^2 = 16$ 이므로

이 원의 중심을 C_2 이라 하면

점 C_2 의 좌표는 $(3, 3)$ 이고

반지름의 길이는 4 이다.

$\overline{C_1 C_2} = 5$ 이고

두 원의 반지름의 길이는 1, 4 이므로

두 원은 서로 외접하게 된다.

따라서 공통접선은 3 개이다.

13. 원 $x^2 + y^2 = r^2$ 을 x 축의 방향으로 2 , y 축의 방향으로 3 만큼 평행 이동한 원의 방정식을 구하여라.

- ① $(x+2)^2 + (y+1)^2 = r^2$
- ② $(x-1)^2 + (y+2)^2 = r^2$
- ③ $(x+2)^2 + (y-1)^2 = r^2$
- ④ $(x-2)^2 + (y-3)^2 = r^2$
- ⑤ $(x+2)^2 + (y+3)^2 = r^2$

해설

원 $x^2 + y^2 = r^2 \dots$ ①
위의 임의의 점 P(x , y)를 x 축의 방향으로 2, y 축의 방향으로 3 만큼 평행이동한 점을 P(x' , y')이라 하면
$$\begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x' - 2 \\ y = y' - 3 \end{cases} \dots$$
 ②
②를 ①에 대입하면 $(x' - 2)^2 + (y' - 3)^2 = r^2$
점 P(x' , y')는 평행이동한 원 위의 임의의 점이므로 구하는 방정식은 $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = r^2$ 이다.

14. 좌표평면 위의 점 $(-1, 3)$ 을 점 (a, b) 에 대하여 대칭이동 시킨 점이 $(3, 5)$ 일 때, $a + b$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

해설

$(-1, 3), (3, 5)$ 의 중점이 (a, b) 이다.

$$\Rightarrow \left(\frac{-1+3}{2}, \frac{3+5}{2} \right) = (a, b)$$

$$\Rightarrow a + b = 5$$

15. 8% 설탕물 100 g 이 있다. 이 설탕물에서 물을 증발시켜 농도를 15% 이상 20% 이하로 만들려고 한다. 이 때 증발시켜야 하는 물의 양이 아닌 것은?

- ① 45 g ② 48 g ③ 50 g ④ 55 g ⑤ 60 g

해설

8% 의 소금물 100 g 의 소금의 양은

$$\frac{8}{100} \times 100 = 8(\text{g}) \text{ 이다.}$$

따라서 물 x g 을 증발시켰을 때의 농도를 나타내면 $\frac{8}{100-x} \times 100$ 이다.

이 값이 15% 이상 20% 이하 이므로,

$$15 \leq \frac{8}{100-x} \times 100 \leq 20 \text{ 이고,}$$

이를 연립방정식으로 나타내면

$$\begin{cases} 15 \leq \frac{8}{100-x} \times 100 \\ \frac{8}{100-x} \times 100 \leq 20 \end{cases}$$

이다. 간단히 나타내면

$$\begin{cases} x \geq \frac{140}{3} \\ x \leq 60 \end{cases}$$

이다. 따라서 x 의 범위는 $\frac{140}{3} \leq x \leq 60$ 이다.

16. x 에 관한 이차부등식 $x^2 + ax + 2a - 3 > 0$ 이 모든 실수 x 에 대하여 성립하도록 상수 a 의 범위를 구하면 $p < a < q$ 이다. 이 때, pq 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $pq = 12$

해설

$x^2 + ax + 2a - 3 > 0$ 이 항상 성립할 조건은
판별식 이 $D < 0$ 을 만족해야 한다.

$$D = a^2 - 4(2a - 3) < 0$$

$$a^2 - 8a + 12 < 0$$

$$(a - 6)(a - 2) < 0$$

$$2 < a < 6 \quad \therefore p = 2, q = 6$$

$$\therefore pq = 2 \times 6 = 12$$

17. 이차방정식 $f(x) = 0$ 의 두 근의 합이 10일 때, 방정식 $f(4x - 3) = 0$ 의 두 근의 합은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$f(x) = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면 $\alpha + \beta = 10$

$f(x) = a(x - \alpha)(x - \beta) = 0$ 로 놓으면

$f(4x - 3) = a(4x - 3 - \alpha)(4x - 3 - \beta) = 0$

$x = \frac{3 + \alpha}{4}, \frac{3 + \beta}{4}$

$\therefore$ 두 근의 합은 $\frac{6 + \alpha + \beta}{4} = 4$

18. 세 점 A(2, 2), B(4, 6), C(0, 1)과 좌표평면 위의 임의의 점 P에 대해 $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$ 의 최솟값과 최솟값일 때의 점 P의 좌표를 구하면?

- ① 61, (0, 0) ② 12, (2, 3) ③ 12, (3, 3)
④ 22, (2, 3) ⑤ 25, (3, 3)

해설

P = (x, y)라 하면

$$\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$$

$$= (x-2)^2 + (y-2)^2 + (x-4)^2 + (y-6)^2 + x^2$$

$$+ (y-1)^2 = 3(x-2)^2 + 3(y-3)^2 + 22$$

∴ 최솟값은 P가 (2, 3)일 때 22이다.

19. 중심이 y 축 위에 있고, 두 점 A(-1, 0) B(3, 2) 를 지나는 원의 중심과 반지름의 길이 r 을 구하면?

① $(0, 3), r = 10$

② $(0, 3), r = \sqrt{10}$

③ $(0, 2), r = 10$

④ $(0, 2), r = \sqrt{10}$

⑤ $(0, -3), r = 10$

해설

중심이 y 축에 있는 원의 방정식은
 $x^2 + (y - a)^2 = r^2 \dots$ ① 이다.
 $(-1, 0)$ 을 $(3, 2)$ 를 ① 에 각각 대입하면,
 $a^2 = r^2 - 1 \dots$ ②
 $(a - 2)^2 = r^2 - 9 \dots$ ③
③ 을 ② 에 대입하면,
 $a^2 = (a - 2)^2 + 8$
 $\Rightarrow a = 3 \quad r = \sqrt{10}$
 $\therefore$ 중심은 $(0, 3)$, 반지름은 $\sqrt{10}$ 이다.

20. x 에 관한 부등식 $(a+2b)x+a-b < 0$ 의 해가 $x > 1$ 일 때, x 에 관한 부등식 $(a-b)x+2a-b > 0$ 을 풀면?

① $x > \frac{1}{3}$
④ $x < -\frac{4}{3}$

② $x < \frac{1}{3}$
⑤ $x > \frac{7}{3}$

③ $x > -\frac{4}{3}$

해설

$$a+2b < 0, \frac{-(a-b)}{a+2b} = 1$$

$\therefore b = -2a$ 이므로

$$(a-b)x+2a-b = a(3x+4) > 0$$

$a > 0$ 을 이용하면

$$\therefore 3x+4 > 0 \therefore x > -\frac{4}{3}$$

21. 두 부등식 $x < -1$, $x > 2$, $2x^2 + (5+2a)x + 5a < 0$ 을 동시에 만족하는 정수 x 의 값이 $x = -2$ 뿐일 때, 실수 a 의 최솟값은? (단, $a < \frac{5}{2}$)

① -3 ② -2 ③ 1 ④ 2 ⑤ -5

해설

$$2x^2 + (5+2a)x + 5a = (2x+5)(x+a) < 0$$

$$-\frac{5}{2} < x < -a \left(\because a < \frac{5}{2} \right)$$

두 부등식을 만족하는 정수가 $x = -2$ 뿐이므로 $-2 < -a \leq 3$

$$\therefore -3 \leq a < 2$$

따라서, 구하는 a 의 최솟값은 -3

22. 좌표평면에서 세 점 A(-1, 1), B(2, 2), C(6, 0)에 대하여 △ABC의 세 변의 수직이등분선의 교점의 좌표는?

- ① (-1, -1)
- ② (2, -2)
- ③ (2, -3)
- ④ (-2, 3)
- ⑤ (-2, -3)

해설

$\overline{AB}$ 의 기울기 : $\frac{2-1}{2-(-1)}$, 중점은 $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) \Rightarrow$ 수직이등분선
: $y = -3\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{2}$
 $\overline{BC}$ 의 기울기는 $\frac{2-1}{6-2} = \frac{1}{4}$, 중심은 (4, 1) $\Rightarrow$ 수직이등분
선: $y = 2(x - 4) + 1$
두 직선의 교점을 구해보면 $x = 2, y = -3$
 $\therefore$ 세 변의 수직이등분선의 교점은 한 점에서 만나므로
 $\therefore (2, -3)$

해설

세 점을 연결한 삼각형의 세 변의 수직이등분선의 교점은 삼각형의 외심이므로 각 점에 이르는 거리가 같다.
 $O(x, y)$ 라고 하면
 $\overline{AO} = \overline{CO}$ 에서 $(x+1)^2 + (y-1)^2 = (x-6)^2 + y^2, 7x - y = 17 \cdots \textcircled{A}$
 $\overline{BO} = \overline{CO}$ 에서 $(x-2)^2 + (y-2)^2 = (x-6)^2 + y^2, 2x - y = 7 \cdots \textcircled{B}$
 $\textcircled{A} \textcircled{B}$ 에서 교점의 좌표는 (2, -3)

23. 두 점 A(-3, 6), B(8, -1)와 직선 $x + y + 1 = 0$ 이 있다. 이 직선 위의 점 P에 대하여 $AP + BP$ 를 최소가 되게 하는 점 P의 좌표를 (x, y)라 할 때, $y - x$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

A(-3, 6)의 직선 $x + y + 1 = 0$ 에 대한 대칭점을 $A'(a, b)$ 라 하면

$$\frac{a-3}{2} + \frac{b+6}{2} + 1 = 0, a+b = -5 \cdots \textcircled{1}$$

$AA' \perp l$ 이므로, AA' 의 기울기는 1이다.

$$\frac{b-6}{a+3} = 1, a-b = -9 \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} : 2a = -14, a = -7, b = 2$$

$$\therefore A'(-7, 2)$$

$$\overline{AP} + \overline{BP} = \overline{A'P} + \overline{BP} \leq \overline{A'B}$$

즉, $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값은 $\overline{A'B}$ 이고,

이 때 점 P는 A', B와 일직선상에 있으므로,

$\overline{A'B}$ 의 기울기는 $\overline{BP}$ 의 기울기와 같다.

$A'(-7, 2)$, $B(8, -1)$, $P(m, n)$ 에서

$$\frac{-1-2}{8-(-7)} = \frac{n+1}{m-8},$$

$$m+5n = 3 \cdots \textcircled{3}$$

점 P는 직선 l 위에 있으므로, $m+n = -1 \cdots \textcircled{4}$

$$\textcircled{3}, \textcircled{4} \text{에서 } m = -2, n = 1$$

$$\therefore P(-2, 1)$$

24. 원 $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 1 = 0$ 을 한 직선 l 에 대하여 대칭이동하면 자기 자신이 된다고 할 때, 다음 중 직선 l 로 알맞은 것은?

① $y = 2x + 3$

② $y = -2x + 1$

③ $y = x + 3$

④ $y = -x + 2$

⑤ $y = 3x - 2$

해설

$$x^2 + y^2 - 6x + 2y + 1 = 0 \text{ 에서}$$

$$(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 9$$

이 원이 직선 l 에 대하여 대칭이어야 하므로

직선 l 이 원의 중심 $(3, -1)$ 을 지나야 한다.

보기의 직선 중 $(3, -1)$ 을 지나는 것은 ④ 뿐이다.

25. $(3, 1)$ 의 직선 $y = 2x + 3$ 에 대한 대칭점을 (a, b) 라 할 때, $a + b$ 는?

① $\frac{4}{5}$

② 1

③ $\frac{6}{5}$

④ $\frac{5}{3}$

⑤ 2

해설

점 (a, b) 와 $(3, 1)$ 을 지나는 직선은 직선 $y = 2x + 3$ 와 수직이다.

이 직선은 $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ 로 나타낼 수 있다.

점 (a, b) 는 이 직선 위의 점이므로

$\left(a, -\frac{1}{2}a + \frac{5}{2}\right)$ 와 같다.

$\left(a, -\frac{1}{2}a + \frac{5}{2}\right)$ 는 직선 $y = 2x + 3$ 과의 거리가

점 $(3, 1)$ 과 직선 $y = 2x + 3$ 과의 거리와 같으므로

점과 직선 사이의 거리에서

$$\frac{|2 \cdot 3 + 3 - 1|}{\sqrt{5}} = \frac{\left|2a + 3 + \frac{1}{2}a - \frac{5}{2}\right|}{\sqrt{5}}$$

$$|5a + 1| = 16$$

$$\therefore a = 3 \text{ 또는 } -\frac{17}{5}$$

$(3, 1)$ 의 대칭점이 (a, b) 이므로 $a \neq 3$,

$$a = -\frac{17}{5} \text{ 일 때, } b = \frac{21}{5}$$

$$\therefore a + b = \frac{4}{5}$$