1. 다음 두 점 사이의 거리를 구하여라.

$A(\sqrt{3}-1,\ 1-\sqrt{2}),\ B(\sqrt{3},\ 1+\sqrt{2})$

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$\overline{AB} = \sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{3}+1)^2+(1+\sqrt{2}-1+\sqrt{2})^2}$

$= \sqrt{1+8} = 3$

2. 두 직선 $y = ax + 2$, $y = 4x + b$ 의 그래프가 모두 점 $(1,\ -2)$ 를 지날 때, 기울기가 ab 이고 y 절편이 $a + b$ 인 직선의 방정식을 구하면?

① $y = -24x + 10$ ② $y = 24x - 10$ ③ $y = 24x + 10$
④ $y = 12x - 10$ ⑤ $y = 12x + 10$

해설

$y = ax + 2$ 가 점 $(1, -2)$ 를 지나므로 $-2 = a + 2$
$\therefore a = -4$
$y = 4x + b$ 가 점 $(1, -2)$ 를 지나므로 $-2 = 4 + b$
$\therefore b = -6$
$\therefore ab = 24$, $a + b = -10$
$\therefore$ 구하는 직선의 방정식 : $y = 24x - 10$

3. 점 $(-2,\ 3)$ 을 지나고 $y=-2x+7$ 에 평행인 직선의 방정식은?

① $y=2x+1$ ② $y=2x-1$ ③ $y=-2x+1$
④ $y=-2x-1$ ⑤ $y=-x+2$

해설

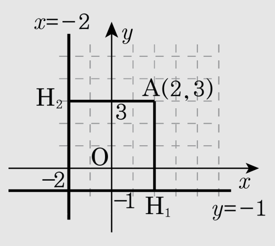
구하고자 하는 직선이 직선 $y=-2x+7$ 에 평행이므로,
기울기는 -2 이고, 점 $(-2,\ 3)$ 을 지나므로,
$y-3=-2(x+2)$, 즉 $y=-2x-1$

4. 점 A$(2,3)$에서 직선 $y=-1$까지의 거리는 (　　) 이고, 직선 $x=-2$까지의 거리는 (　　) 이다. 위의 (　　) 안에 알맞은 값을 차례로 나열한 것은?

① $2,3$　　② $3,2$　　③ $3,3$　　④ $4,3$　　⑤ $4,4$

해설

다음 그림에서 점 A에서 $y=-1$에 내린 수선의발을 H_1이라 하면
$\overline{\mathrm{AH}_1}=4$ 이다.
또한 $x=-2$에 내린 수선의 발을 H_2라고 하면
$\overline{\mathrm{AH}_2}=4$ 이다.



5. 점 $(4, 1)$ 과 직선 $4x - 3y - 9 = 0$ 사이의 거리를 구하면?

① 1 ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{2}{5}$ ④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{4}{5}$

해설

점과 직선 사이의 거리 구하는 공식을 이용하면,$\Rightarrow \dfrac{|4 \times 4 + 1 \times (-3) - 9|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \dfrac{4}{5}$

6. 연립부등식 $\begin{cases} 5(x-9) < 4x-7 \\ 4x-7 \le 5(x-8) \end{cases}$ 을 만족하는 해집합 중에서 가장 작은 정수는?

① 33　② 34　③ 35　④ 36　⑤ 37

해설

$5x-45 < 4x-7$,　$x < 38$

$4x-7 \le 5x-40$,　$33 \le x$

$\therefore\ 33 \le x < 38$

7. 모든 실수 x, y에 대하여 $x^2+pxy+qy^2 \geq 0$이 항상 성립하려면 다음 중 어떤 조건을 만족해야 하는가?

① $p<q$ ② $p^2 \leq q$ ③ $p \leq q^2$

④ $p^2 \leq 4q$ ⑤ $p^2 \geq 4q^2$

해설

모든 실수 x, y에 대하여 $x^2+pxy+qy^2 \geq 0$이 항상 성립하려면 x에 대한 이차방정식 $x^2+pxy+qy^2=0$의 판별식을 D라 할 때

$D=(py)^2-4qy^2 \leq 0$

$(p^2-4q)y^2 \leq 0 \cdots ㉠$

㉠이 모든 실수 y에 대하여 성립하려면

$p^2-4q \leq 0$이어야 한다.

$\therefore p^2 \leq 4q$

8. $ax^2 - 2ax + 3 < 0$를 만족하는 x가 없도록 하는 실수 a의 값의 범위는?

① $a > 0$　　② $-1 < a < 3$　　③ $0 \le a \le 3$

④ $-1 < a < 4$　　⑤ $-1 \le a \le 4$

해설

(i) $a = 0$일 때, 성립한다.

(ii) $a \neq 0$일 때, 함수 $y = ax^2 - 2ax + 3$에서 $D \le 0$이므로

$a^2 - 3a \le 0$

$\therefore 0 < a \le 3 (\because a \neq 0)$

9. 연립부등식 $\begin{cases} x^2 - x - 6 \le 0 \\ 4x^2 - 8x + 3 \ge 0 \end{cases}$ 을 풀면?

① $-2 \le x \le \frac{1}{2}$ 또는 $\frac{3}{2} \le x \le 3$
② $-2 \le x \le \frac{1}{2}$ 또는 $2 \le x \le 3$
③ $-2 \le x \le \frac{1}{2}$ 또는 $\frac{3}{2} \le x \le 2$
④ $-2 \le x \le 1$ 또는 $\frac{3}{2} \le x \le 3$
⑤ $-2 \le x \le 1$ 또는 $\frac{3}{2} \le x \le 2$

해설

$\begin{cases} x^2 - x - 6 \le 0 & \cdots ㉠ \\ 4x^2 - 8x + 3 \ge 0 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠ $(x-3)(x+2) \le 0$
$-2 \le x \le 3$
㉡ $(2x-3)(2x-1) \ge 0$
$x \ge \frac{3}{2}, \quad x \le \frac{1}{2}$
㉠과 ㉡의 공통범위 :
$-2 \le x \le \frac{1}{2}, \quad \frac{3}{2} \le x \le 3$

10. 두 부등식 $2x-1>0$, $(x+1)(x-a)<0$을 동시에 만족하는 x의 값의 범위가 $\frac{1}{2}<x<3$ 이 되도록 하는 정수 a의 값은? (단,$a>1$)

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$2x-1>0$

$\therefore x>\frac{1}{2}$ $\cdots\cdots$ ①

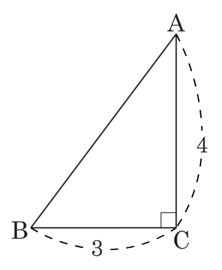
$(x+1)(x-a)<0$

$\therefore -1<x<a$ $\cdots\cdots$ ②

즉 ①, ②의 공통 부분이 $\frac{1}{2}<x<3$ 이므로

$\therefore a=3$

11. 다음 그림과 같이 $\overline{BC} = 3$, $\overline{AC} = 4$ 인 직각 삼각형이 있다. 선분 AB를 $2 : 3$으로 외분하는 점을 P, $3 : 2$로 외분하는 점을 Q라 할 때, $\overline{CP}^2 + \overline{CQ}^2$ 의 값은?



① 125 ② 200 ③ 250

④ 325 ⑤ 450

해설

점 C를 원점으로 잡으면 점 A, B의 좌표는
각각 $A(0, 4)$, $B(-3, 0)$이다.
따라서 선분 AB를 $2 : 3$으로
외분하는 점 P의 좌표는

$$P\left(\frac{2\times(-3)-3\times 0}{2-3}, \frac{2\times 0-3\times 4}{2-3}\right)$$

$= P(6, 12)$

선분 AB를 $3 : 2$로 외분하는 점 Q의 좌표는

$$Q\left(\frac{3\times(-3)-2\times 0}{3-2}, \frac{3\times 0-2\times 4}{3-2}\right)$$

$= Q(-9,\ -8)$

$$\overline{CP}^2 + \overline{CQ}^2 = (6^2+12^2)+(9^2+8^2)$$
$$= 325$$

12. 평행이동 $f:(x, y) \rightarrow (x+1, y-2)$ 에 의하여 점 $(1, 2)$ 가 옮겨진 점의 좌표는?

① $(2, 1)$　　② $(2, 0)$　　③ $(-2, 1)$
④ $(0, 4)$　　⑤ $(1, -2)$

해설
$(x, y) \rightarrow (x+1, y-2)$
$\Rightarrow (1, 2) \rightarrow (1+1, 2-2) = (2, 0)$

13. 원 $x^2+(y+1)^2=4$ 를 x 축의 방향으로 3 만큼 평행이동한 후, 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식이 $(x-a)^2+(y-b)^2=4$ 일 때, $a+b$ 의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

원 $x^2+(y+1)^2=4$ 를 x 축의 방향으로
3 만큼 평행이동하면 $(x-3)^2+(y+1)^2=4$
이 원을 다시 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동하면
$(y-3)^2+(x+1)^2=4$,
$\therefore\ (x+1)^2+(y-3)^2=4$ 이
$(x-a)^2+(y-b)^2=4$ 와 일치하므로
$a=-1$, $b=3$
$\therefore\ a+b=2$

14. 점 $(-1, -2)$ 를 x 축의 방향으로 6 만큼 평행이동한 다음 직선 $x = a$ 에 대하여 대칭이동하면 처음 위치로 돌아온다. 이 때, 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

먼저 점 $(-1, -2)$ 를 x 축의 방향으로 6 만큼 평행이동한 점의 좌표는
$(-1 + 6, -2)$, 즉 $(5, -2)$
점 $(5, -2)$ 를 다시 직선 $x = a$ 에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는
$(2a - 5, -2)$
이 때, 이것이 $(-1, -2)$ 와 같으므로 $2a - 5 = -1$
$\therefore a = 2$

15. 두 부등식

$\frac{x-2}{2} > \frac{4x-k}{3}$, $\frac{3x+1}{4} < \frac{-x+1}{6}$ 의 해가 같을 때, 상수 k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{61}{22}$

해설

$\frac{x-2}{2} > \frac{4x-k}{3}$ 에서 $3x-6 > 8x-2k$

$\therefore x < \frac{2k-6}{5}$

$\frac{3x+1}{4} < \frac{-x+1}{6}$ 에서 $9x+3 < -2x+2$

$\therefore x < -\frac{1}{11}$

두 부등식의 해가 서로 같으므로

$\frac{2k-6}{5} = -\frac{1}{11}$

$\therefore\ k = \frac{61}{22}$

16. 부등식 $ax^2+5x+b>0$ 을 풀어서 $2<x<3$ 이라는 해가 구해졌다. 이 때, ab 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $ab=6$

해설

$ax^2+5x+b>0$ ……㉠
해가 $2<x<3$ 이 되는 이차부등식은
$(x-2)(x-3)<0$ 전개하면
$x^2-5x+6<0$ ……㉡
㉠과 일차항의 계수를 맞추기위해
양변에 -1 을 곱하면
$-x^2+5x-6>0$ ……㉢
㉠, ㉢이 일치해야 하므로 $a=-1$, $b=-6$

17. $1 < x < 3$ 에서 x 에 대한 이차방정식 $x^2 - ax + 4 = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 실수 a 의 값의 범위가 $\alpha < a < \beta$ 일 때, $3\alpha\beta$ 의 값을 구하여라.

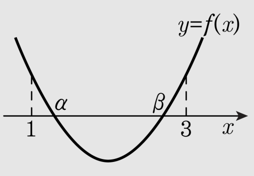
▶ 답 :

▷ 정답 : 52

해설

$f(x) = x^2 - ax + 4$ 라 하면

$1 < x < 3$ 에서 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같아야 한다.



(i) $x^2 - ax + 4 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$D = a^2 - 16 > 0$ 에서 $(a+4)(a-4) > 0$

$\therefore\ a < -4$ 또는 $a > 4$

(ii) $f(1) = 5 - a > 0$ 에서 $a < 5$

$f(3) = 13 - 3a > 0$ 에서 $a < \frac{13}{3}$

$\therefore\ a < \frac{13}{3}$

(iii) $y = f(x)$ 의 그래프의 대칭축이

$x = \frac{a}{2}$ 이므로 $1 < \frac{a}{2} < 3$

$\therefore\ 2 < a < 6$

(i), (ii), (iii) 에서 a 의 값의 범위는 $4 < a < \frac{13}{3}$

따라서, $\alpha = 4,\ \beta = \frac{13}{3}$ 이므로 $3\alpha\beta = 52$

18. 제1 사분면에서 x축에 접하고 반지름의 길이가 2인 원 C_1과 y축에 접하고 반지름의 길이가 1인 원 C_2가 다음 조건을 만족할 때, 원 C_1의 중심의 x좌표와 원 C_2의 중심의 y좌표의 합을 구하면?

(가) 두 원 C_1, C_2는 외접한다. (나) 두 원 C_1, C_2의 중심을 지나는 직선의 기울기는 -1이다.

① $1+\sqrt{2}$　　② $2+2\sqrt{2}$　　③ $3+3\sqrt{2}$

④ $4+4\sqrt{2}$　　⑤ $5+5\sqrt{2}$

해설

두 원 C_1, C_2의 방정식을 각각

$(x-a)^2+(y-2)^2=4\ (a>0)$

$(x-1)^2+(y-b)^2=1\ (b>0)$로 놓을 수 있다.

이 때, (가)에서 두 원이 외접하므로 두 원의 중심

$A(a,2)$, $B(1,b)$ 사이의 거리는 두 원의 반지름의 길이의 합과 같다.

따라서, $\sqrt{(1-a)^2+(b-2)^2}=3$

양변을 제곱하면 $(a-1)^2+(b-2)^2=9 \cdots\cdots$ ㉠

(나)에서 직선 AB의 기울기가 -1이므로

$\frac{b-2}{1-a}=-1$

$b-2=a-1$

$\therefore b=a+1 \cdots\cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$(a-1)^2+(a-1)^2=9$

$2a^2-4a-7=0$

$\therefore a=1\pm\frac{3\sqrt{2}}{2}$ (a>0)

㉡에서 $b=a+1=2+\frac{3\sqrt{2}}{2}$

$\therefore a+b=3+3\sqrt{2}$

19. 원 $x^2+y^2-2ax-2y-4=0$ 이 원 $x^2+y^2+2x+2ay-2=0$ 의 둘레를 이등분하면서 지날 때, a 의 값의 합은?

① -4　　② -2　　③ -1　　④ 1　　⑤ 2

해설

원 $x^2+y^2-2ax-2y-4=0$ 이
원 $x^2+y^2+2x+2ay-2=0$ 의 둘레를 이등분하려면
두 원의 공통현이
원$x^2+y^2+2x-2ay-2=0$ 의 중심을 지나야 한다.
공통현의 방정식은
$(1+a)x+(a+1)y+1=0 \cdots\cdots$ ㉠
㉠이 점 $(-1,\ -a)$ 를 지나므로
$(1+a)\times(-1)+(a+1)\times(-a)-2=0$
$a^2+2a=0$
$\therefore$ 근과 계수와의 관계에 의해 -2

20. 직선 $3x+4y+a=0$ 이 원 $x^2+y^2-2x+2y=2$ 에 접할 때, 양수 a 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a=11$

해설

원의 방정식을 표준형으로 나타내면
$(x-1)^2+(y+1)^2=2^2$
직선이 원에 접하므로 원의 중심
$(1,\ -1)$ 에서 직선까지의 거리가
원의 반지름의 길이2 와 같다.
따라서, $\dfrac{|3\cdot 1+4\cdot(-1)+a|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2$
$|a-1|=10$
$a-1=\pm 10$
$a>0$ 이므로 $a=11$

21. $A : 0.4 - 0.25x \le 1.5x - 1.35$, $B : -\frac{1-2x}{4} < \frac{2-x}{2} - \frac{x-1}{3}$ 가 있다. A 에서 B를 제외한 수는?

① $x < 1$　　② $x \ge 1$　　③ $x < \frac{19}{16}$
④ $x \le \frac{19}{16}$　　⑤ $x \ge \frac{19}{16}$

해설

$0.4 - 0.25x \le 1.5x - 1.35$ 의 양변에 100을 곱하면
$40 - 25x \le 150x - 135$
$175 \le 175x$
$1 \le x$
$A : 1 \le x$
$-\frac{1-2x}{4} < \frac{2-x}{2} - \frac{x-1}{3}$ 의 양변에 12 를 곱하면
$-3(1-2x) < 6(2-x) - 4(x-1)$
$-3 + 6x < 12 - 6x - 4x + 4$
$x < \frac{19}{16}$
$B : x < \frac{19}{16}$ 이므로
A 에서 B를 제외한 수는 $x \ge \frac{19}{16}$ 이다.

22. 좌표평면 위에 두 점 $\mathrm{A}(a, b)$, $\mathrm{B}(-2,\ 2)$가 있다. 이 0때, $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{(a+2)^2+(b-2)^2}$의 최솟값은?

① 1　② $\sqrt{2}$　③ 2　④ $2\sqrt{2}$　⑤ 3

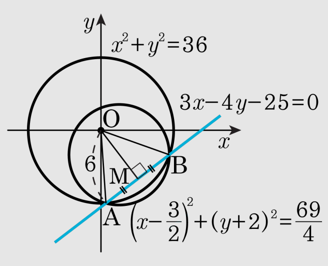
해설

원점을 $\mathrm{O}(0,\ 0)$이라 하면
$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{(a+2)^2+(b-2)^2}$
$=\overline{\mathrm{OA}}+\overline{\mathrm{AB}}$이므로
이 값이 최소가 되는 것은 세 점 O, A, B가 일직선 위에 있을 때이다.
따라서 $\overline{\mathrm{OA}}+\overline{\mathrm{AB}}$의 최소값은
$\overline{\mathrm{OB}}=\sqrt{(-2)^2+2^2}=2\sqrt{2}$

23. 두 원 $x^2+y^2-36=0$, $x^2+y^2-3x+4y-11=0$의 공통현의 길이는?

① $\sqrt{11}$ ② $2\sqrt{11}$ ③ $3\sqrt{11}$ ④ $4\sqrt{11}$ ⑤ $5\sqrt{11}$

해설



두 원의 공통현의 방정식은

$x^2+y^2-36-(x^2+y^2-3x+4y-11)=0$

$\therefore 3x-4y-25=0 \cdots\cdots$ ㉠

$x^2+y^2-3x+4y-11=0$에서

$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+(y+2)^2=\frac{69}{4}$

이므로 두 원을 좌표평면 위에 나타내면 다음과 같다.

다음의 그림과 같이 두 원의 교점을 A, B

$\overline{AB}$의 중점을 M이라 하면

원 $x^2+y^2=36$의 중심 $(0,0)$과 직선 ㉠사이의 거리 $\overline{OM}$은

$\overline{OM}=\frac{|-25|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=5$

원 $x^2+y^2=36$의 반지름의 길이는 6이므로

피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{AM}=\sqrt{6^2-5^2}=\sqrt{11}$

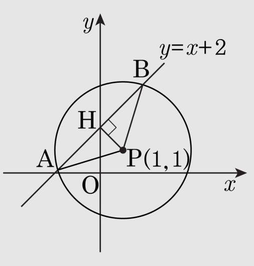
따라서, 공통현의 길이 $\overline{AB}$는

$\overline{AB}=2\overline{AM}=2\sqrt{11}$

24. 중심이 $(1,\ 1)$ 이고, 반지름이 3 인 원과 직선 $y = x + 2$ 가 두 점 A, B 에서 만난다. 이 때, 두 점 A, B 사이의 거리를 구하면?

① $2\sqrt{3}$ ② $2\sqrt{5}$ ③ $2\sqrt{6}$ ④ $2\sqrt{7}$ ⑤ $2\sqrt{10}$

해설



그림에서 원의 중심을 P, 점 P 에서 선분 AB 에 내린 수선의 발을 H 라 하면

$\overline{\mathrm{PH}} = \dfrac{|1-1+2|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \sqrt{2}$

$\overline{\mathrm{AH}} = \sqrt{3^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{7}$

따라서 $\overline{\mathrm{AB}} = 2 \cdot \overline{\mathrm{AH}} = 2\sqrt{7}$

25. 두 점 $\mathrm{A}(4,1), \mathrm{B}(5,1)$을 직선 $x-y+1=0$에 대하여 대칭이동시킨 점을 각각 C, D라 할 때, 사각형 ABCD의 넓이는?

① 3　② $\frac{9}{2}$　③ $\frac{22}{3}$　④ 9　⑤ $\frac{33}{2}$

해설

점 $\mathrm{A}(4,1)$의 대칭점을 $\mathrm{C}(a,b)$라 하면 $\overline{\mathrm{AC}}$ 의 중점

$\mathrm{M}\left(\frac{a+4}{2}, \frac{b+1}{2}\right)$ 이 직선 $x-y+1=0$ 위에 있으므로 대입하면

$\frac{a+4}{2}-\frac{b+1}{2}+1=0$

$\therefore a-b+5=0 \cdots$ ①

또 직선 AC는 직선 $x-y+1=0$에 수직이므로

$\frac{b'-1}{a-4} \times 1=-1$

$\therefore a+b-5=0 \cdots$ ②

①, ②를 연립하면 $a=0,\ b=5$

$\therefore \mathrm{C}(0,5)$

같은 방법으로 점 $\mathrm{B}(5,1)$의 대칭점 $\mathrm{D}(0,6)$이다.

따라서 사각형 ABCD의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 5 \times 5-\frac{1}{2} \times 4 \times 4=\frac{9}{2}$