1. 연립부등식 $4x-3<2x+5<3x+8$ 을 만족하는 x 의 값 중 가장 큰 정수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$4x-3<2x+5<3x+8$

$\Rightarrow \begin{cases} 4x-3<2x+5 \\ 2x+5<3x+8 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 2x<8 \\ -x<3 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x<4 \\ x>-3 \end{cases}$

$\therefore\ -3<x<4$

가장 큰 정수는 3 이다.

2. 연립부등식 $\begin{cases} 3x^2+4x-4 \ge 0 \\ (x+1)^2 < 4 \end{cases}$ 을 풀면?

① $-2 < x \le -1,\ \dfrac{2}{3} < x < 1$

② $-1 < x \le -3,\ \dfrac{2}{3} \le x < 2$

③ $-2 < x \le 0,\ \dfrac{1}{3} < x < 1$

④ $-3 < x \le -2,\ \dfrac{2}{3} \le x < 1$

⑤ $-4 < x \le -2,\ \dfrac{1}{3} < x < 1$

해설

$\begin{cases} 3x^2+4x-4 \ge 0 \cdots \text{(가)} \\ (x+1)^2 < 4 \cdots \text{(나)} \end{cases}$

(가)에서 $(x+2)(3x-2) \ge 0$이므로

$x \le -2$ 또는 $x \ge \dfrac{2}{3}$

(나)에서 $-2 < x+1 < 2$,

$-3 < x < 1$이므로

$-3 < x \le -2,\ \dfrac{2}{3} \le x < 1$

3. 두 점 A $(3,-2)$, B $(-1,2)$ 에서 같은 거리에 있는 x 축 위의 점 P 의 좌표를 구하면?

① $(1,\ -1)$ ② $(-1,\ 0)$ ③ $(1,\ 0)$

④ $(2,\ 0)$ ⑤ $(2,\ -1)$

해설

x 축 위의 점을 P $(x, 0)$ 이라 하면 $(x-3)^2+2^2=(x+1)^2+2^2$

$\Rightarrow x=1$

4. 점 A$(-1,\ -1)$에 대하여 점 P$(2,\ 3)$과 대칭인 점 Q의 좌표를 구하면?

① Q$(-4,\ 5)$ ② Q$(4,\ -5)$ ③ Q$(-4,\ -5)$

④ Q$(-2,\ -3)$ ⑤ Q$(1,\ 1)$

해설

점 P와 점 Q는 점 A에 대하여 대칭이므로
$\overline{PA} = \overline{QA}$이다.
즉 선분 PQ의 중점이 점 A이다.
Q$(x,\ y)$라 하면, 점 P$(2,\ 3)$과
점 Q를 이은 선분의 중점이 A$(-1,\ -1)$이므로

$$\frac{x+2}{2} = -1,\ \frac{y+3}{2} = -1$$

$\therefore\ x = -4,\ y = -5$

$\therefore$ Q$(-4,\ -5)$

5. 다음<보기> 중 직선 $y = \frac{1}{2}x + 1$ 과 서로 수직인 직선을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $y = 2x + 1$

㉡ $y = -2(x - 1)$

㉢ $y = -2x + 3$

① ㉠　　② ㉡　　③ ㉢　　④ ㉠, ㉢　　⑤ ㉡, ㉢

해설

서로 수직인 두 직선의 기울기의 곱은 -1 이므로

직선 y $\frac{1}{2}x + 1$ 과 수직인 직선의 기울기는 -2 이다.

기울기가 -2 인 직선은 ㉡, ㉢이다.

6. 세 직선 $l: y=-2x+3, m: 4x-2y+1=0, n: x-2y+3=0$에 대하여 다음 보기 중 옳은 것은?

보기

㉠ $l // m$ ㉡ $m \perp n$ ㉢ $l \perp n$

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉢

④ ㉠.㉡ ⑤ ㉠.㉡.㉢

해설

$l: y=-2x+3,\ m: 4x-2y+1=0 \Leftrightarrow y=2x+\frac{1}{2}$

$n: x-2y+3=0 \Leftrightarrow y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$에서

두 직선 l과 n의 기울기의 곱이

$(-2)\times\frac{1}{2}=-1$이므로

l과 n은 서로 수직이다.

즉, $l \perp n$ 한편, 기울기가 같은 직선은

없으므로 서로 평행한 직선은 없다.

따라서 옳은 것은 ㉢뿐이다

7. $2 \le x \le 5,\ 1 \le y \le a$일 때, $x+y$의 범위가 xy의 범위 안에 포함되기 위한 실수 a의 최솟값은? (단, $a \ge 1$)

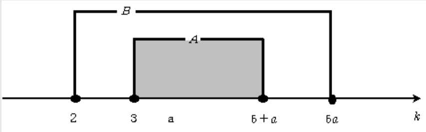
① 1　② $\frac{8}{7}$　③ $\frac{7}{6}$　④ $\frac{5}{4}$　⑤ $\frac{3}{2}$

해설

$3 \le x+y \le 5+a,\ 2 \le xy \le 5a$이므로

$3 \le x+y \le 5+a,$

이때 $x+y$의 범위가 xy의 범위 안에 포함되려면 다음 수직선에서



$5+a \le 5a$ 이어야 하므로 $4a \ge 5$

$\therefore a \ge \frac{5}{4}$

8. 연속하는 세 홀수의 합이 45 보다 크고 55 보다 작을 때, 세 홀수를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

▷ 정답 : 17

▷ 정답 : 19

해설

연속하는 세 홀수를 $x-2, x, x+2$ 라 하면

$45 < (x-2)+x+(x+2) < 55$

$45 < 3x < 55$

$\rightarrow \begin{cases} 45 < 3x \\ 3x < 55 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > 15 \\ x < \dfrac{55}{3} \end{cases} \rightarrow 15 < x < \dfrac{55}{3}$

$\therefore\ x = 16,\ 17,\ 18$

x 는 홀수이므로 17 이다.

따라서 세 홀수는 15 , 17 , 19 이다.

9. 모든 실수 x에 대하여 $x^2 + ax + a$가 -3보다 항상 크기 위한 상수 a의 값의 범위는?

① $-4 < a < 3$ ② $-2 < a < 4$ ③ $-2 < a < 6$

④ $2 < a < 4$ ⑤ $2 < a < 6$

해설

$x^2 + ax + a > -3, x^2 + ax + (a+3) > 0$

모든 실수 x에 대하여 성립하려면

이차방정식 $x^2 + ax + (a+3) = 0$의 판별식을

D라 할 때,

$D < 0$이어야 하므로

$D = a^2 - 4(a+3) < 0$

$a^2 - 4a - 12 < 0, (a-6)(a+2) < 0$

$\therefore -2 < a < 6$

10. 복소수 $z = a+bi$를 좌표평면 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$에 대응시킬 때, $(2-3i)z$가 실수가 되게 하는 점 P가 그리는 도형은? (단, a, b는 실수, $i=\sqrt{-1}$)

① 원
② 아래로 볼록한 포물선
③ 위로 볼록한 포물선
④ 기울기가 음인 직선
⑤ 기울기가 양인 직선

해설

$$(2-3i)z = (2-3i)(a+bi)$$
$$= (2a+3b)+(2b-3a)i \cdots ㉠$$

㉠이 실수이려면 $2b=3a$

$$\therefore\ b = \frac{3}{2}a$$

따라서, 기울기가 양인 직선이다.

11. 직선 $3x+y-5=0$을 x축 방향으로 1만큼, y축 방향으로 n만큼 평행이동하면 직선 $3x+y-1=0$이 된다. 이 때, n의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -7

해설

x축 방향으로 1, y축 방향으로 n만큼 평행이동하므로
직선 $3x+y-5=0$에 x 대신 $x-1$, y 대신 $y-n$을 대입하면
$3(x-1)+(y-n)-5=0$
$3x+y-n-8=0$ $\cdots\cdots$ ㉠
㉠이 $3x+y-1=0$과 일치하므로 $-n-8=-1$ $\therefore$ $n=-7$

12. 점 $(5,1)$ 을 직선 $y=3$ 에 대하여 대칭이동한 다음 y 축의 방향으로 4 만큼 평행이동한 점은 점 $(5,1)$ 을 직선 $y=b$ 에 대하여 대칭이동한 점과 같다. 이때, 상수 b 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

(i) 점 $(5,1)$ 을 직선 $y=3$ 에 대하여
대칭이동한 점의 좌표는 $(5, 2\cdot 3-1)$ 즉, $(5,5)$
점 $(5,5)$ 를 다시 y 축의 방향으로 4 만큼
평행이동한 점의 좌표는 $(5, 5+4)$
즉, $(5,9)$

(ii) 점 $(5,1)$ 을 직선 $y=b$ 에 대하여
대칭이동한 점의 좌표는 $(5, 2b-1)$

(i), (ii) 로부터 $2b-1=9$ $\quad\therefore b=5$

13. 원 $x^2+y^2+ax+by=0$ 을 y 축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식이 $x^2+y^2+(2-b)x+(2a-4)y=0$ 일 때, 상수 a, b 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

원 $x^2+y^2+ax+by=0$ 을
y 축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은
$(-x)^2+y^2+a(-x)+by=0$
즉, $x^2+y^2-ax+by=0$
이것이 $x^2+y^2+(2-b)x+(2a-4)y=0$ 과
같으므로 계수를 비교하면
$-a=2-b,\ b=2a-4$
두 식을 연립하여 풀면 $a=6,\ b=8$
$\therefore\ a+b=6+8=14$

14. 부등식 $\begin{cases} x-11 \geq 2x-4 \\ a-x<1 \end{cases}$ 의 해가 없을 때, a 가 될 수 있는 가장 작은 수를 구하여라.

① -3 ② -4 ③ -5 ④ -6 ⑤ -7

해설

$\begin{cases} x-11 \geq 2x-4 \\ a-x<1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq -7 \\ x > a-1 \end{cases}$

의 해가 없으므로 $a-1 \geq -7$

$\therefore \ a \geq -6$

따라서 a 의 가장 작은 수는 -6 이다.

15. x 에 대한 이차부등식 $x^2 + ax + b > 0$ 의 해가 $x < 1$ 또는 $x > 4$ 일 때 상수 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$x^2 + ax + b > 0$ 의 해가 $x < 1$ 또는 $x > 4$ 이려면
$(x - 1)(x - 4) > 0$ 에서 $x^2 - 5x + 4 > 0$ 이므로
$a = -5,\ b = 4$ 따라서 $a + b = -1$

16. 직선 $(k+1)x-(k-2)y-3=0$에 대하여 <보기>의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, k는 실수)

< 보 기>

ㄱ $k=-1$이면 점 $(1,\ 0)$을 지난다.

ㄴ $k=2$이면 y축에 평행이다.

ㄷ k의 값에 관계없이 점 $(1,\ 1)$을 지난다.

① ㄷ　　② ㄱ, ㄴ　　③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ　　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해설

ㄱ $k=-1$이면 $y=1$이므로 점 $(0,\ 1)$을 지난다.

ㄴ $k=2$이면 $x=1$이므로 y축에 평행이다.

ㄷ $(x-y)k+(x+2y-3)=0$이므로 k의 값에 관계없이 점 $(1,\ 1)$을 지난다.

17. 두 원 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$, $(x-5)^2+y^2=4$ 의 공통내접선의 길이는?

① $\sqrt{6}$ ② $\sqrt{7}$ ③ $2\sqrt{2}$ ④ 3 ⑤ $\sqrt{10}$

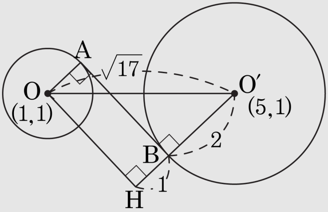
해설

두 원의 중심거리는

$\overline{OO'}=\sqrt{(5-1)^2+(0-1)^2}=\sqrt{17}$

$\overline{O'H}=\overline{O'B}+\overline{BH}=\overline{O'B}+\overline{OA}=2+1=3$ 이므로

$\overline{AB}=\overline{OH}=\sqrt{\overline{OO'}^2-\overline{O'H}^2}=\sqrt{17-3^2}=2\sqrt{2}$



따라서 공통내접선의 길이는 $2\sqrt{2}$ 이다.

18. 이차방정식 $x^2-(p+1)x+2p-1=0$의 두 근이 모두 -2와 2사이에 있도록 실수 p의 값의 범위를 구하면?

① $p>5, p<1$ ② $-\frac{5}{4}<p<1$ ③ $-5<p<3$

④ $p>1, p<-1$ ⑤ $p>5, p<-1$

해설

$f(x)=x^2-(p+1)x+2p-1$로 놓으면

(i) 이차방정식이 두 근을 가지므로 $D>0$에서

$(p+1)^2-4(2p-1)>0,\ \ p^2+2p+1-8p+4>0$

$p^2-6p+5>0,\ \ (p-5)(p-1)>0$

$\therefore\ \ p>5,\ \ p<1$

(ii) $f(-2)>0$에서

$4+2(p+1)+2p-1>0$

$4p+5>0,\ \ 4p>-5 \quad \therefore\ \ p>-\frac{5}{4}$

(iii) $f(2)>0$에서

$4-2p-2+2p-1>0$ ∴ 성립

(iv) 대칭축이 -2 와 2 사이에 있어야 하므로

$-2<\frac{p+1}{2}<2 \qquad -4<p+1<4$

$\therefore\ \ -5<p<3$

따라서 (i), (ii), (iii), (iv)에서

$\therefore\ \ -\frac{5}{4}<p<1$

19. 한 변의 길이가 a 인 정사각형 ABCD 의 외부에 있는 점으로서 두 꼭짓점을 바라보는 각이 $90°$ 를 이루는 점의 자취의 길이는? (단, 변을 통과하여 바라볼 수는 없다.)

① πa ② $\sqrt{2}\pi a$ ③ $2\pi a$

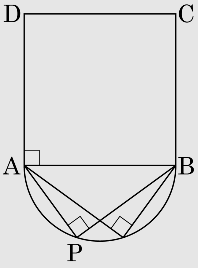
④ $2\sqrt{2}\pi a$ ⑤ $4\pi a$

해설

두 점 A, B 를 바라보는 각이 $90°$ 되는점 점 P 의 자취는 AB 를 지름으로 하는 (바깥쪽의) 반원이다.

4개의 반원의 길이의 합이므로

$$2\times\left(2\pi\frac{a}{2}\right)=4\pi\left(\frac{a}{2}\right)=2\pi a$$



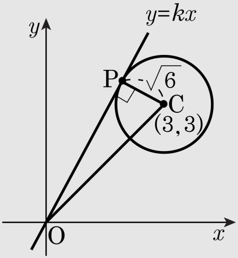
20. $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 6$ 을 만족시키는 실수 x, y 에 대하여 $\dfrac{y}{x}$ 의 최댓값은?

① $3+2\sqrt{2}$　　② $2+\sqrt{3}$　　③ $3\sqrt{3}$

④ 6　　⑤ $6+2\sqrt{3}$

해설

$(x-3)^2 + (y-3)^2 = 6$ 은 중심이$(3,3)$,
반지름이 $\sqrt{6}$ 인 원이고
$P(x,y)$ 에 대하여
$\dfrac{y}{x}$ 의 최댓값은 $\dfrac{y}{x} = k$, $y = kx$ 이므로
$\overline{OP}$ 의 기울기의 최댓값이다.
$y = kx$ 라 두고 원에 접하는 경우로 계산하면
$kx - y = 0$ 에서 중심 $(3,\ 3)$ 까지의 거리가
원의 반지름 $\sqrt{6}$ 과 같다.



$$\frac{|3k-3|}{\sqrt{k^2+1}} = \sqrt{6},\ k^2 - 6k + 1 = 0$$

$k = 3 \pm 2\sqrt{2}$ 이므로, 최댓값은 $3+2\sqrt{2}$ 이다.