1. 연립부등식 $\begin{cases} \dfrac{x-1}{2} > 1 \\ 0.7x + 0.5 < 0.2x + 1 \end{cases}$ 의 해는?

① $-3 < x < 3$　② $x < -3$　③ $x > 3$

④ 해가 없다.　⑤ $-3 < x < 5$

해설

$\begin{cases} \dfrac{x-1}{2} > 1 \\ 0.7x + 0.5 < 0.2x + 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - 1 > 2 \\ 7x + 5 < 2x + 10 \end{cases}$

$\rightarrow \begin{cases} x > 3 \\ 5x < 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x < 1 \end{cases}$

따라서 해가 없다.

2. 두 점A(2, 3), B(4, 1) 에서 같은 거리에 있는 x 축 위의 점P 에 대하여 원점 O 에서 점P 까지의 거리는?

① 1　　② $\sqrt{2}$　　③ $\sqrt{3}$　　④ $\frac{3}{4}$　　⑤ 2

해설

x 축 위의 점P 의 좌표를 $P(a, 0)$ 이라 하면 $\overline{PA} = \overline{PB}$ 이므로

$\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2$

$(2-a)^2 + (3-0)^2 = (4-a)^2 + (1-0)^2$

$a^2 - 4a + 13 = a^2 - 8a + 17$, $4a = 4$, $a = 1$ $\therefore$ $\overline{OP} = 1$

3. 다음 중 좌표평면 위의 임의의 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$ 를 원점에 대하여 대칭이동 시키는 것을 나타낸 식은?

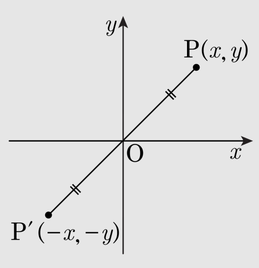
① $f:(x,\ y)\ \to\ (-x,\ -y)$　　② $f:(x,\ y)\ \to\ (-y,\ x)$

③ $f:(x,\ y)\ \to\ (-x,\ y)$　　④ $f:(x,\ y)\ \to\ (x,\ y)$

⑤ $f:(x,\ y)\ \to\ (y,\ x)$

해설

좌표 평면 위에 직선 $y=x$ 위에 있지 않은 임의의 한 점을 잡아서 직접 원점에 대해 대칭시켜서 두 점의 좌표 사이의 관계를 찾아본다.



다음 그림과 같이 좌표평면 위의 임의의 점

$\mathrm{P}(x,\ y)$ 을 원점에 대하여 대칭이동 시키면

점 $\mathrm{P}'(-x,\ -y)$ 이 되므로 이를 옳게 나타낸 식은

$f:(x,\ y)\ \to\ (-x,\ -y)$ 이다.

4. 모든 실수 x에 대하여 부등식 $kx^2-2(k-4)x+2\ge 0$이 성립하도록 하는 실수 k의 값의 범위는?

① $k\le -2$　　② $-1\le k\le 2$　　③ $1\le k\le 8$

④ $2\le k\le 8$　　⑤ $k\le 8$

해설

x^2의 계수가 미지수 k이므로

ⅰ) $k=0$일 때 $8x+2\ge 0$에서 $x\ge -\frac{1}{4}$이므로

모든 실수 x에 대하여 성립하는 것은 아니다.

ⅱ) $k\ne 0$일 때 $kx^2-2(k-4)x+2\ge 0$의 해가 모든 실수이려면

$k>0\cdots$ ㉠

$\frac{D}{4}=(k-4)^2-2k\le 0,\ k^2-10k+16\le 0,$

$(k-2)(k-8)\le 0\quad \therefore 2\le x\le 8\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $2\le k\le 8$

ⅰ), ⅱ)에서 $2\le k\le 8$이다.

5. $\begin{cases} x^2 - 3x \le 0 \\ x^2 - 5x + 4 < 0 \end{cases}$ 을 만족하는 x 의 범위의 해가 $\alpha < x \le \beta$ 일 때, $\alpha + \beta$ 의 값은?

▶ 답:

▷ 정답: 4

해설

$x^2 - 3x \le 0$ 에서
$x(x-3) \le 0$ 이므로
$0 \le x \le 3 \cdots$ ㈎
$x^2 - 5x + 4 < 0$ 에서
$(x-1)(x-4) < 0$ 이므로
$1 < x < 4 \cdots$ ㈏
㈎, ㈏에 의해
$1 < x \le 3$ 이므로
$\alpha = 1, \beta = 3$
$\therefore \alpha + \beta = 4$

6. 원 $x^2 + y^2 + 4x - 10y + 28 = 0$ 의 중심과 점 $(4,\ -1)$ 을 지름의 양 끝점으로 하는 원의 방정식을 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ 이라고 할 때, $a + b + r^2$ 의 값은?

① 13 ② 15 ③ 17 ④ 19 ⑤ 21

해설

$x^2 + y^2 + 4x - 10y + 28 = 0$

$\Rightarrow\ (x+2)^2 + (y-5)^2 = 1$

$\therefore$ 구하는 원은 $(-2,\ 5)$ 와 $(4,\ -1)$ 을 지름의 양 끝으로 하는 원이다.

이 원은 중심이 $\left(\dfrac{-2+4}{2},\ \dfrac{5-1}{2}\right) = (1,\ 2)$

반지름이 $\dfrac{1}{2}\sqrt{(4+2)^2 + (-1-5)^2} = 3\sqrt{2}$

이므로 원의 방정식은

$(x-1)^2 + (y-2)^2 = (3\sqrt{2})^2 = 18$

$\therefore\ a = 1,\ b = 2,\ r^2 = 18$

$\therefore\ a + b + r^2 = 21$

7. 원 $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ 을 x 축에 대하여 대칭이동한 원의 중심이 $(-1, -3)$ 이고 반지름의 길이가 2 일 때, 상수 a, b, c 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

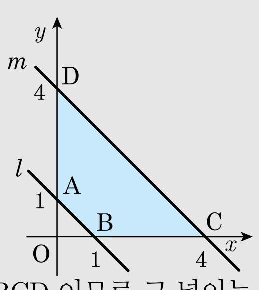
원 $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ 을 x 축에 대하여
대칭이동한 원의 방정식은
$x^2 + y^2 + ax - by + c = 0$
이 때, 이 원의 중심이 $(-1, -3)$ 이고
반지름의 길이가 2 이므로
$x^2 + y^2 + ax - by + c = 0$
$\Leftrightarrow (x+1)^2 + (y+3)^2 = 4$
$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2x + 6y + 6 = 0$
$\therefore a = 2,\ b = -6,\ c = 6$
따라서, 구하는 $a,\ b,\ c$ 의 값의 합은
$2 + (-6) + 6 = 2$

8. 직선 $l : x + y = 1$ 을 x 축의 방향으로 2 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 직선을 m 이라고 할 때, 두 직선 l, m 과 x 축 및 y 축으로 둘러싸인 도형의 넓이는?

① $\frac{11}{2}$　　② 6　　③ $\frac{13}{2}$　　④ 7　　⑤ $\frac{15}{2}$

해설

직선 $l : x + y = 1$ 을 x 축의 방향으로 2 만큼,
y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한
직선의 방정식은 $(x-2) + (y-1) = 1$
$\therefore m : x + y = 4$
따라서, 두 직선 l, m 과 x 축 및 y 축으로
둘러싸인 도형은 다음 그림의 사각형 ABCD 이므로 그 넓이는
삼각형 OCD 의 넓이에서
삼각형 OBA 의 넓이를 뺀 것과 같다.



$$\therefore \square ABCD = \triangle OCD - \triangle OBA$$
$$= \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1$$
$$= \frac{15}{2}$$

9. 직선 $y = x + 1$ 에 관해서 점 $\mathrm{A}(-2, 3)$ 과 대칭인 점의 좌표를 (x, y) 라 할 때, $x + y$ 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$y = x + 1$ 에 $\mathrm{A}(-2, 3)$ 에 대칭인 점은 A' 이므로 $\overline{\mathrm{AA}'}$ 의 중점은 $y = x + 1$ 위의 점이다.

$\dfrac{-2 + a}{2} + 1 = \dfrac{3 + b}{2} \quad \cdots\cdots$ ㉠

또 $\overline{\mathrm{AA}'}$ 의 기울기와 $y = x + 1$ 의 기울기의 곱이 -1 이므로

$\left(\dfrac{b - 3}{a + 2}\right) \times 1 = -1$

$\therefore\ b - 3 = -a - 2 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에 의해 $a = 2, \quad b = -1$

$\therefore\ (2, -1)$

10. 좌표평면 위의 원점에서 직선$3x-y+2-k(x+y)=0$ 까지의 거리의 최대값은?(단, k 는 실수)

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $\sqrt{2}$

해설

원점 O 에서 직선 $(3-k)x-(1+k)y+2=0$ 까지의 거리는

$$\frac{|2|}{\sqrt{(3-k)^2+(1+k)^2}}=\frac{2}{\sqrt{2k^2-4k+10}}$$

거리가 최대가 되려면 분모가 최소일 때이다.

$2k^2-4k+10=2(k-1)^2+8\geq 8$ 이므로

$$\frac{2}{\sqrt{2k^2-4k+10}}\leq\frac{2}{\sqrt{8}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\therefore$ 최대값 $\frac{\sqrt{2}}{2}$