1. 직선 $y = ax + b$ 의 그래프가 2, 3, 4 분면을 지날 때, x 에 대한 이차 방정식 $ax^2 + bx + 1 = 0$ 근의 개수에 대한 설명으로 옳은 것은?

① 서로 다른 두 실근을 갖는다.

② 하나의 중근을 갖는다.

③ 근은 존재하지 않는다.

④ 근의 개수는 무한하다.

⑤ 알 수 없다.

해설

직선 $y = ax + b$ 의 기울기와 y 절편이 모두 음수이므로 $a < 0,\ b < 0$,
$ax^2 + bx + 1 = 0$ 에서 $D = b^2 - 4a > 0$ 이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

2. 이차방정식 $x^2 - 6x + (a - 1) = 0$ 의 서로 다른 두 근이 모두 정수가 되도록 하는 자연수 a 값을 모두 더한 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$x^2 - 6x = -a + 1,\ x^2 - 6x + 9 = -a + 10,\ (x - 3)^2 = -a + 10$
$x - 3 = \pm\sqrt{-a + 10},\ x = 3 \pm \sqrt{10 - a}$
두 근이 정수가 되려면 $10 - a$ 가 제곱수가 되어야 하므로
$10 - a = 9, 4, 1$ 에서 $a = 1, 6, 9$
a값 들의 합은 $1 + 6 + 9 = 16$ 이다.

3. 방정식 $(2-x-y)^2-(x^2+y^2)=12$ 을 만족하는 정수의 순서쌍 $(x,\ y)$ 에 대하여 x^2+y^2 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 109

해설

주어진 식을 전개하여 정리하면, $4-4(x+y)+(x+y)^2-(x^2+y^2)=12$,
$-4(x+y)+2xy=8,\quad xy-2(x+y)=4,\ xy-2(x+y)+4=8,$
$(x-2)(y-2)=8$
그런데 $x,\ y$ 는 정수이므로,

$x-2$	1	2	4	8	-1	-2	-4	-8
$y-2$	8	4	2	1	-8	-4	-2	-1
x^2+y^2	109	52	52	109	37	4	4	37

따라서 x^2+y^2 의 최댓값은 109 이다.

4. 포물선 $y=\frac{a}{2}x^2+2ax+2a-3$ 이 두 점 $A(2,2), B(4,2)$ 를 잇는 선분 AB 와 만날 때, a 의 값의 범위를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{5}{18}\le a\le\frac{5}{8}$

해설

$y=\frac{a}{2}x^2+2ax+2a-3$

$=\frac{a}{2}(x+2)^2-3$

꼭짓점이 $(-2,-3)$ 이다.

(i) 포물선이 점 A 를 지날 때

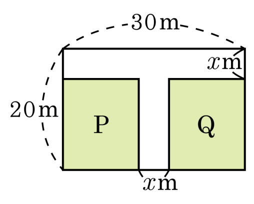
$2=\frac{a}{2}\times16-3,\ 8a=5,\ a=\frac{5}{8}$ 이다.

(ii) 포물선이 점 B 를 지날 때

$2=\frac{a}{2}\times36-3,\ 18a=5,\ a=\frac{5}{18}$ 이다.

$\therefore \frac{5}{18}\le a\le\frac{5}{8}$

5. 가로와 세로의 길이가 30m, 20m 인 직사각형 모양의 화단이 있다. 다음 그림과 같이 폭이 xm 인 길을 내어 P, Q 두 개의 화단으로 만들었더니 P, Q 화단의 넓이가 각각 150m^2, 225m^2 가 되었다. 이때, 길의 폭은?



▶ 답 : ______ m

▷ 정답 : 5 m

해설

(P, Q 화단의 넓이의 합) $= (30-x)(20-x)$
$= 600 - 50x + x^2$
$= 375$

$x^2 - 50x + 225 = 0$

$\therefore\ (x-5)(x-45) = 0$

그런데 $0 < x < 20$ 이므로 $x = 5$ 이다.

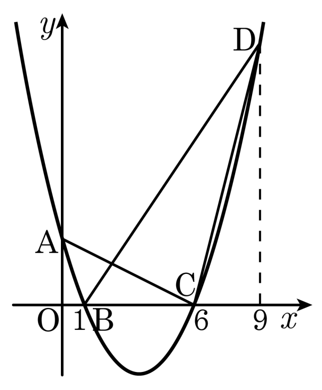
6. 다음 이차함수의 그래프 중 4 번째로 폭이 좁은 것은?

① $y=-(x-2)^2$
② $y=\dfrac{2x(x-1)(x+1)}{x-1}$
③ $y=\dfrac{1}{3}x^2+\dfrac{1}{3}$
④ $y=-3x^2+x$
⑤ $y=-\dfrac{5}{2}x^2$

해설

a 의 절댓값이 클수록 폭이 좁아진다.
a 의 절댓값을 각각 구하면
① 1
② 2
③ $\dfrac{1}{3}$
④ 3
⑤ $\dfrac{5}{2}$
이므로 폭이 좁은 순서는 ④, ⑤, ②, ①, ③이다. 따라서 네 번째로 폭이 좁은 것은 ①이다.

7. 다음 그림은 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프이다. 삼각형 ABC 의 넓이가 $\frac{15}{2}$ 일 때, 삼각형 BCD 의 넓이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 30

해설

$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times (6-1) \times c = \frac{15}{2}$ 이다.

$c = 3$, 즉 $A(0, 3)$ 이다.

$y = ax^2 + bx + 3 = a(x-1)(x-6) = ax^2 - 7ax + 6a$

$6a = 3$, $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{7}{2}$ 이다.

$y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{2}x + 3$ 이므로 $D(9, 12)$ 이다.

$\triangle BCD = \frac{1}{2} \times (6-1) \times 12 = 30$

8. 동서 방향으로 길이가 $500\,\text{m}$, 남북방향으로 길이가 $200\,\text{m}$ 인 직사각형 모양의 땅에 동서 방향으로 x 개, 남북방향으로 $2x$ 개의 길을 내려고 한다. 도로의 넓이가 전체 땅의 넓이의 $8.8\,\%$ 가 되도록 할 때, x 의 값으로 알맞은 것은? (단 도로의 폭은 $1\,\text{m}$ 로 일정하다.)

① 8　② 10　③ 12　④ 14　⑤ 16

해설

동서방향으로 난 도로의 넓이는 $500 \times x = 500x(\,\text{m}^2)$,
남북방향으로 난 도로의 넓이는 $200 \times 2x = 400x(\,\text{m}^2)$ 이고,
동서 방향과 남북 방향으로 난 도로가 겹치는 부분의 넓이는 $x \times 2x = 2x^2$ 이므로
도로의 넓이는 $500x+400x-2x^2 = 500\times200\times\frac{8.8}{100}, 900x-2x^2 = 8800$,
$x^2 - 450x + 4400 = 0,\ (x-440)(x-10)=0$
$\therefore\ x = 10\ (\because 0 < x < 200)$

9. $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 수 중 가장 큰 정수를 나타낼 때, 방정식 $[x]^2 - 4[x] - 5 = 0$ 의 해를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $-1 \le x < 0$

▷ 정답 : $5 \le x < 6$

해설

$[x]^2 - 4[x] - 5 = 0$ 에서 $([x] + 1)([x] - 5) = 0$
$[x] = -1$ 또는 $[x] = 5$
$\therefore\ -1 \le x < 0,\ 5 \le x < 6$

10. 이차방정식 $x^2+3x-5=0$ 의 한 근이 p 일 때, $\dfrac{p^3+3p^2+15}{p+3}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$x^2+3x-5=0$ 에 $x=p$ 를 대입하면

$p^2+3p-5=0$, $p^2+3p=5$

주어진 식을 변형하여 $p^2+3p=5$ 를 대입하면

$$\begin{aligned}\frac{p^3+3p^2+15}{p+3} &= \frac{p(p^2+3p)+15}{p+3} \\ &= \frac{5p+15}{p+3} \\ &= \frac{5(p+3)}{p+3} \\ &= 5\end{aligned}$$

$\therefore \dfrac{p^3+3p^2+15}{p+3}=5$

11. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 (2, 3) 일 때, 이 그래프가 제 2 사분면을 지나지 않을 a 의 값의 범위는? (단, $a \neq 0$ 임)

① $a < -\frac{4}{3}$ ② $a \leq -\frac{4}{3}$ ③ $a < \frac{3}{4}$
④ $a \leq -\frac{3}{4}$ ⑤ $a > \frac{4}{3}$

해설

a 의 부호에 따라 그래프의 모양이 다르므로 양수인 경우와 음수인 경우로 나누어 생각해야 한다면
$a > 0$ 이면 항상 제 2 사분면을 지난다.
$a < 0$ 이면 y 절편이 양수일 때에는 제 2 사분면을 지나고 y 절편이 음수이거나 0 일 때 제 2 사분면을 지나지 않는다.
꼭짓점이 (2, 3) 이므로 $y = a(x-2)^2 + 3$ 이다.
즉, $y = ax^2 - 4ax + 4a + 3$ 이다.
여기서 y 절편은 $4a + 3$ 이다.
$4a + 3 \leq 0$
$\therefore a \leq -\frac{3}{4}$

12. 이차방정식 $x^2 - 6x - n = 0$ 의 해가 정수가 되도록 하는 두 자리의 정수 n 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 6 개

해설

$x = 3 \pm \sqrt{9+n}$ 이므로 해가 정수가 되기 위해서는

$9 + n =$ (완전제곱수) 이고 n 은 두 자리의 정수이므로

$9 + n = 25,\ 36,\ 49,\ \cdots, 100$

$n = 16,\ 27,\ 40,\ 55,\ 72,\ 91$ 의 6 개이다.

13. 이차방정식 $\left\{1+(a+b)^2\right\}x^2-2(1-a-b)x+2=0$ 의 근이 실수일 때, 실수 $a+b+2$ 의 값을 구하면?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

근이 실수이면 $D \geq 0$이므로

$\frac{D}{4}=(1-a-b)^2-2\left\{1+(a+b)^2\right\} \geq 0$

$(a+b)^2+2(a+b)+1 \leq 0$

$\therefore\ (a+b+1)^2 \leq 0$

$a,\ b$ 는 실수이므로 $a+b+1=0$

$\therefore\ a+b+2=1$

14. 이차방정식 $x^2-3px-3p=0$ 을 $(x+a)^2=\frac{21}{4}$ 의 꼴로 나타낼 수 있을 때, 양수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{7}{2}$

해설

$x^2-3px-3p=0$을 변형하면

$\left(x-\frac{3}{2}p\right)^2=\frac{9}{4}p^2+3p$

이때, $a=-\frac{3}{2}p$, $\frac{9}{4}p^2+3p=\frac{21}{4}$ 이다.

$\frac{9}{4}p^2+3p=\frac{21}{4}$ 에서 $3p^2+4p-7=0$

$(3p+7)(p-1)=0$

$\therefore\ p=-\frac{7}{3}$ 또는 $p=1$

$a=-\frac{3}{2}p$에서 $a>0$이므로 $p<0$, $p=-\frac{7}{3}$

$\therefore\ a=-\frac{3}{2}p=\frac{7}{2}$

15. 이차방정식 $6x^2-5(a+b)x+(a+b)^2=0$ 의 한 근이 $x=1$ 일 때, 자연수 a, b 의 값은 모두 몇 쌍인지 구하여라.

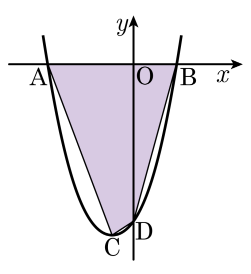
▶ 답: 쌍

▷ 정답: 3 쌍

해설

한 근이 $x=1$ 이므로 $6-5(a+b)+(a+b)^2=0$
$a+b=A$ 로 치환하면
$A^2-5A+6=0$, $(A-2)(A-3)=0$,
$\therefore A=2$ 또는 3
1) $a+b=2$ 일 때 $a=1,\ b=1$
2) $a+b=3$ 일 때 $a=2,\ b=1$ 또는 $a=1,\ b=2$
1), 2) 에서 $(a,\ b)$ 의 쌍은 $(1,\ 1),\ (2,\ 1),\ (1,\ 2)$ 의 3 개이다.

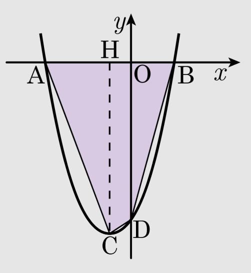
16. 다음 이차함수 $y=x^2+2x-8$ 의 그래프에서 x축과의 교점을 각각 A, B라 하고 꼭짓점의 좌표를 C, y축과의 교점을 D라 할 때 □ABDC의 넓이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 30

해설



i) $0=x^2+2x-8=(x+4)(x-2)$

$\therefore\ x=-4$ 또는 $x=2$

$\therefore$ A$(-4,\ 0)$, B$(2,\ 0)$, D$(0,\ -8)$

ii) $y=x^2+2x-8$

$=(x^2+2x+1)-9$

$=(x+1)^2-9$

$\therefore$ C$(-1,\ -9)$

iii) □ABDC

$=\triangle\mathrm{ACH}+\triangle\mathrm{ODB}+\square\mathrm{HCDO}$

$=3\times9\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{2}\times8+(8+9)\times1\times\frac{1}{2}$

$=\frac{27}{2}+8+\frac{17}{2}=30$

17. $a > 0$인 상수 a에 대하여 이차방정식 $x^2+2(2a-1)x+(3a^2-4a+1) = 0$의 두 근 중 작은 근이 이차방정식 $4x^2 - 12px + 9p^2 = 0$의 근과 같을 때, $2a + p$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{2}{3}$

해설

$x^2 + 2(2a-1)x + (3a^2 - 4a + 1) = 0$에서

$x^2 + 2(2a-1)x + (3a-1)(a-1) = 0$

$(x + 3a - 1)(x + a - 1) = 0$

$\therefore\ x = -3a + 1$ 또는 $x = -a + 1$

$a > 0$ 이므로 두 근 중 작은 근은

$x = -3a + 1 \cdots$ ㉠

$4x^2 - 12px + 9p^2 = 0$ 에서 $(2x - 3p)^2 = 0$

$\therefore\ x = \frac{3p}{2} \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $-3a + 1 = \frac{3p}{2}$

$\therefore\ 2a + p = \frac{2}{3}$

18. 직선 $y = (b-2a)x$ 가 x 의 값이 증가할 때 y 의 값이 증가한다. $ax^2+bx+a=0$ 의 근의 개수를 m 개, $bx^2+4ax+b=0$ 의 근의 개수를 n 개라 할 때, $m-n$ 의 값을 구하여라. (단, a, b 는 양수이다.)

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

$y = (b-2a)x$ 가 x 의 값이 증가할 때 y 의 값이 증가하므로 기울기 $b-2a>0$ 이다.
$ax^2+bx+a=0$ 의 판별식을 보면 $b^2-4a^2=(b-2a)(b+2a)>0$ 이므로 $m=2$ 이고,
$bx^2+4ax+b=0$ 의 판별식을 보면 $(4a)^2-4b^2=4(2a-b)(2a+b)<0$ 이므로 $n=0$ 이다.
따라서 $m-n=2-0=2$ 이다.