1. 직선 $x=2$에 접하고, 원 $(x+3)^2+y^2=1$에 외접하는 원의 중심의 자취를 나타내는 식은?

① $y^2=-8x$　　② $y^2=8x$　　③ $y^2=-12x$

④ $x^2=-8y$　　⑤ $x^2=8y$

해설

구하는 원의 중심을 $\mathrm{P}(x,y)$라 놓고 x,y 사이의 관계식을 세운다.
점 P에서 직선 $x=2$에 내린 수선의 발을 B, 원$(x+3)^2+y^2=1$의 중심을 A라고 하면

$\overline{\mathrm{AP}}-1=\overline{\mathrm{BP}}$ 에서

$\sqrt{(x+3)^2+y^2}-1=2-x$

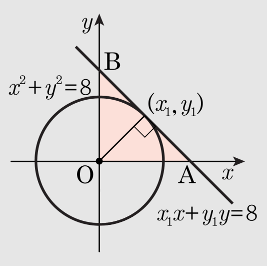
$\therefore\ y^2=-12x$

2. 원 $x^2+y^2=8$ 과 제1사분면에서 접하는 접선이 x 축, y 축과 만나는 점을 각각 A, B 라고 할 때, 직각삼각형 OAB 의 넓이의 최솟값을 구하여라. (단, O 는 원점이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설



제1사분면에서의 원 위의 접점을 (x_1, y_1) 이라고 하면 접선의 방정식은 $x_1x+y_1y=8 \cdots\cdots$ ㉠ (단, $x_1>0, y_1>0$)

한편, 두 점 A, B 는 각각 접선 ㉠과 x 축, y 축의 교점이므로

$\mathrm{A}\left(\frac{8}{x_1}, 0\right), \mathrm{B}\left(0, \frac{8}{y_1}\right)$

따라서, 직각삼각형 OAB 의 넓이를 S 라고 하면

$\mathrm{S}=\frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{OA}}\cdot\overline{\mathrm{OB}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{x_1}\cdot\frac{8}{y_1}=\frac{32}{x_1y_1}$

이 때, (x_1, y_1) 이 원 $x^2+y^2=8$ 위의 점이므로

$x_1^2+y_1^2=8$ 이고

$x_1>0, y_1>0$ 에서

$\frac{x_1^2+y_1^2}{2}\geq\sqrt{x_1^2\cdot y_1^2}=x_1y_1,\ x_1y_1\leq 4$

$\therefore \frac{1}{x_1y_1}\geq\frac{1}{4}\leftarrow\frac{x_1^2+y_1^2}{2}=\frac{8}{2}=4$

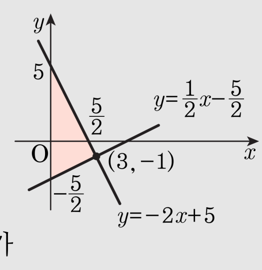
$\therefore \mathrm{S}=\frac{32}{x_1y_1}\geq 32\cdot\frac{1}{4}=8$ (단, 등호는 $x_1=y_1$ 일 때 성립)

따라서, 구하는 넓이의 최소의 값은 8 이다.

3. 점 $(3, -1)$ 에서 원 $x^2 + y^2 = 5$ 에 그은 두 접선과 y축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이를 S 라 할 때, $4S$ 의 값은?

① 33　　② 35　　③ 45　　④ 49　　⑤ 55

해설



접선의 기울기를 m이라고 하면 점 $(3, -1)$ 에서
원에 그은 접선의 방정식을 $y + 1 = m(x - 3)$ 이라 하자.
이 때, 원의 중심 $(0, 0)$ 에서 직선 $y+1 = m(x-3)$,
즉 $mx - y - 3m - 1 = 0$ 에 이르는 거리가
반지름의 길이 $\sqrt{5}$와 같으므로

$$\frac{|-3m-1|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = \sqrt{5}\ ,\ |3m+1| = \sqrt{5(m^2+1)}$$

양변을 제곱하여 정리하면 $2m^2 + 3m - 2 = 0$, $(2m-1)(m+2) = 0$

$\therefore m = \frac{1}{2}$ 또는 $m = -2$

즉, 구하는 접선의 방정식은

$y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$, $y = -2x + 5$

따라서 구하는 삼각형의 넓이 S 는

$$S = \frac{1}{2} \times \left\{5 - \left(-\frac{5}{2}\right)\right\} \times 3 = \frac{45}{4}$$

$\therefore 4S = 45$

4. 두 원 $x^2+y^2=1$, $x^2+(y-3)^2=4$ 의 공통접선의 방정식이 $y=mx+n$ 일 때, m^2+n^2 의 값은?(단, $m \neq 0$)

① 15 ② 16 ③ 17 ④ 18 ⑤ 19

해설

원 $x^2+y^2=1$ 의 중심 $(0,\ 0)$ 에서
직선 $y=mx+n$,
즉 $mx-y+n=0$ 에 이르는 거리가 1 이므로

$$\frac{|n|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1$$

$\therefore\ m^2=n^2-1\ \cdots$ ㉠
원 $x^2+(y-3)^2=4$ 의 중심 $(0,\ 3)$ 에서
직선 $mx-y+n=0$ 에 이르는 거리가 2 이므로

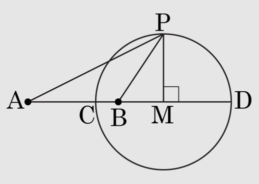
$$\frac{|-3+n|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2$$

$\therefore\ n^2-6n+9=4m^2+4\ \cdots$ ㉡
㉠ 을 ㉡ 에 대입하면,
$n^2-6n+9=4(n^2-1)+4$, $3n^2+6n-9=0$
$n^2+2n-3=0$, $(n+3)(n-1)=0$
$\therefore\ n=-3$ 또는 $n=1$
이 때, $n=1$ 이면 $m=0$ 이 되므로 $n=-3$
$n=-3$ 을 ㉠ 에 대입하면 $m^2=8$
$\therefore\ m^2+n^2=8+9=17$

5. 두 점 $A(1, 1)$, $B(7, 4)$ 에서 이르는 거리의 비가 $2 : 1$ 인 임의의 점 P 에 대하여 $\triangle ABP$ 의 넓이가 최대일 때, $\tan(\angle PAB)$ 의 값은?

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

해설



점 P 의 자취는 선분 AB 를 $2 : 1$ 로 내분하는 점 C와 $2 : 1$ 로 외분하는 점 D 를

지름의 양 끝으로 하는 원이다.

점 C 의 좌표는

$\left(\frac{14+1}{2+1}, \frac{8+1}{2+1}\right)$, 즉 $C(5, 3)$

점 D 의 좌표는

$\left(\frac{14-1}{2-1}, \frac{8-1}{2-1}\right)$ 즉, $D(13, 7)$

따라서, CD 의 중점 M 의 좌표는

$\left(\frac{5+13}{2}, \frac{3+7}{2}\right)$

즉, $M(9, 5)$ 이므로

$\overline{CM} = \sqrt{(9-5)^2 + (5-3)^2} = 2\sqrt{5}$

따라서, 점 P 의 자취는 중심의 좌표가 $(9, 5)$ 이고 반지름의 길이가 $2\sqrt{5}$ 인 원이므로 자취의 방정식은

$(x-9)^2 + (y-5)^2 = 20$

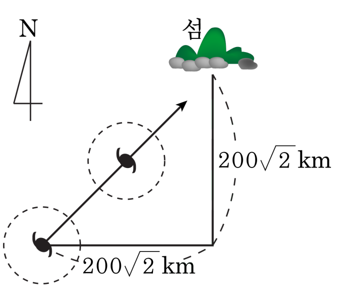
그런데 다음 그림에서 $\triangle ABP$ 의 넓이가 최대인 경우는 선분 AM 과 선분 PM 이 수직인 경우이다.

이 때, $\overline{AM} = \sqrt{(9-1)^2 + (5-1)^2} = 4\sqrt{5}$,

$\overline{PM} = 2\sqrt{5}$ 이므로

$\tan(\angle PAB) = \tan(\angle PAM) = \frac{2\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} = \frac{1}{2}$

6. 반지름의 길이가 10 km 인 원 모양의 섬이 있다. 현재 태풍의 중심은 이 섬의 중심으로부터 남쪽으로 $200\sqrt{2}$ km, 서쪽으로 $200\sqrt{2}$ km 떨어진 곳에서 시속 10 km 의 속력으로 북동쪽으로 진행하고 있다. 태풍의 중심에서 30 km 이내가 폭풍우권이라고 할 때, 처음으로 이 섬 전체가 폭풍우권에 들어가는데 걸리는 시간은 몇 시간인지 구하면?(단, 폭풍우권의 크기는 일정하다.)

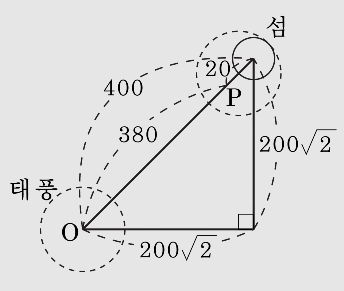


▶ 답 : ______ 시간

▷ 정답 : 38 시간

해설

태풍이 O 에서 출발하여 P 지점에 도착하면
섬 전체가 폭풍우권에 들어간다.
$\overline{OP} = 380(\text{km})$ 이므로 걸리는 시간은 38 시간



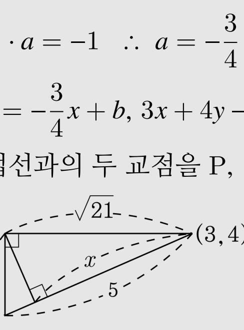
7. 한 점 A$(3, 4)$ 에서 원 $x^2 + y^2 = 4$ 에 접선을 그을 때생기는 두 접점을 지나는 직선의 방정식을 구하면?

① $3x + 4y = 1$ ② $3x + 4y = 2$ ③ $3x + 4y = 3$

④ $3x + 4y = 4$ ⑤ $3x + 4y = 5$

해설

구하는 직선의 방정식을 $y = ax + b$ 라고 하면

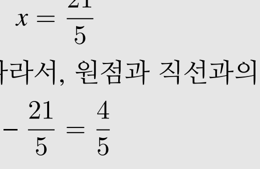


구하고자 하는 직선은 원점과 (3, 4) 를 이은 선분에 수직이므로

$\frac{4}{3} \cdot a = -1 \quad \therefore \ a = -\frac{3}{4}$

$y = -\frac{3}{4}x + b,\ 3x + 4y - 4b = 0 \quad \cdots\cdots \ (1)$

접선과의 두 교점을 P, Q 라 할때 다음과 같다.



$y = ax + b$ 와 (3, 4) 와 거리가 x 일때,
삼각형의 닮음조건에 의해서

$5 : \sqrt{21} = \sqrt{21} : x$

$\therefore \ x = \frac{21}{5}$

따라서, 원점과 직선과의 거리는

$5 - \frac{21}{5} = \frac{4}{5}$

즉, (0, 0) 에서 직선 (1) 에 이르는 거리는

$\frac{|-4b|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{4}{5}$

$4|b| = 4 \quad b = 1 \quad (\because \ b > 0)$

$\therefore \ 3x + 4y = 4$

8. 좌표평면에서 중심이 (a, b) 이고 x 축에 접하는 원이 두 점 $\mathrm{A}(0, 5)$ 와 $\mathrm{B}(8, 1)$ 을 지난다. 이 때, 원의 중심 (a, b) 와 직선 AB 사이의 거리는? (단, $0 \le a \le 8$)

① $\sqrt{3}$ ② $\sqrt{5}$ ③ $\sqrt{6}$ ④ $\sqrt{7}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

해설

주어진 원이 x 축에 접하므로 그 방정식은
$(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$
$\therefore\ x^2+y^2-2ax-2by+a^2=0$
이 원이 두 점 $\mathrm{A}(0,\ 5)$, $\mathrm{B}(8,\ 1)$ 을 지나므로
$a^2-10b+25=0,\ a^2-16a-2b+65=0$
두 식을 연립하면
$4a^2-80a+300=0,\ 4(a-5)(a-15)=0$
그런데
$0 \le a \le 8$ 이므로 $a=5,\ b=5$ 이다.
이 때, 직선 AB 의 방정식은
$$y-5=\frac{1-5}{8-0}(x-0)$$
$\therefore\ x+2y-10=0$
따라서 원의 중심 $(5,\ 5)$ 와 직선 AB 사이의 거리 d 는
$$d=\frac{|5+2\cdot 5-10|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\sqrt{5}$$

9. 두 점 $\mathrm{A}(-5,\ -2)$, $\mathrm{B}(2,\ 5)$ 에 대하여 원 $x^2+y^2=9$ 위를 움직이는 점을 P 라고 할 때, $\triangle\mathrm{ABP}$ 의 무게중심 G 는 중심이 $(a,\ b)$ 이고 반지름이 c 인 원 위를 움직이게 된다. 이 때, $a+b+c$ 의 값을 구하면?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ -1　　⑤ 0

해설

$\mathrm{P}=(\alpha,\ \beta)$ 라 하면,

$$\mathrm{G}=\left(\frac{-5+2+\alpha}{3},\ \frac{-2+5+\beta}{3}\right)$$

$$=\left(-1+\frac{\alpha}{3},\ 1+\frac{\beta}{3}\right)$$

$-1+\dfrac{\alpha}{3}=p$, $1+\dfrac{\beta}{3}=q$ 라 하면,

$\alpha=3p+3,\ \ \beta=3q-3,\quad \alpha^2+\beta^2=9$ 이므로

$\therefore\ \ (3p+3)^2+(3q-3)^2=9$

$\Rightarrow\ \ (p+1)^2+(q-1)^2=1$

$\Rightarrow$ 중심이 $(-1,\ 1)$ 이고, 반지름이 1 인 원

$\therefore\ \ a+b+c=1$

10. 이차곡선 $x^2+y^2+ax+by+7=0$ 이 반지름 1인 원을 표시한다. 이 원의 중심 $a,\ b$ 가 변할 때, 이 도형의 자취의 길이를 구하면?

① $\sqrt{2}\pi$ ② $2\sqrt{2}\pi$ ③ $3\sqrt{2}\pi$ ④ $4\sqrt{2}\pi$ ⑤ $6\sqrt{2}\pi$

해설

$$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{a^2+b^2-28}{4}$$

$\dfrac{a^2+b^2-28}{4}=1$ 에서

$a^2+b^2=32\cdots$ ㉠

중심 $\left(-\dfrac{a}{2},\ -\dfrac{b}{2}\right)$ 에서

$x=-\dfrac{a}{2},\ y=-\dfrac{b}{2}$ 이므로

$a=-2x,\ b=-2y$ 를 ㉠에 대입하면

$4x^2+4y^2=32 \quad \therefore\ x^2+y^2=8$

$\therefore\ 2\pi r=4\sqrt{2}\pi$

11. 두 원 $x^2+y^2+2x-2my+m^2-4=0$, $x^2+y^2-2mx-2y+m^2-8=0$이 직교할 때 m의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

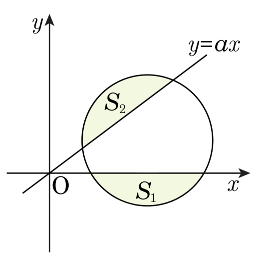
▷ 정답 : $\sqrt{6}$

▷ 정답 : $-\sqrt{6}$

해설

두 원의 교점에서 접선이 수직이므로
$(x+1)^2+(y-m)^2=5$
$(x-m)^2+(y-1)^2=9$
두 원의 교점과 각 원의 중심이 직각삼각형을 이루므로
$(m+1)^2+(1-m)^2=14$
$m^2=6$
$m=\pm\sqrt{6}$

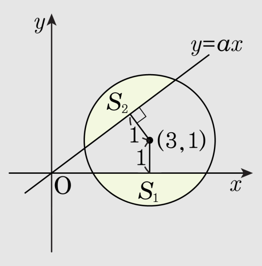
12. 아래 그림에서 원 $(x-3)^2+(y-1)^2=4$ 와 x 축으로둘러싸인 부분의 넓이를 S_1 , 직선 $y=ax$ 로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2 라 하자. $S_1=S_2$ 일 때, $100a$ 의 값을 구하면?



▶ 답 :

▷ 정답 : 75

해설

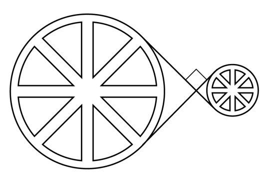


$S_1=S_2$ 이면, 중심 $(3,1)$ 에서 직선 $y=ax$ 까지 거리는 1 이다.

따라서 $1=\dfrac{|3a-1|}{\sqrt{a^2+1}}$ 이고 $a=\dfrac{3}{4}$ 이다.

$\therefore\ 100a=75$

13. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 6, 2 인 두 원판을 ∞ 모양으로 벨트를 채웠는데 가운데 부분이 수직으로 만난다고 한다. 이 벨트의 길이를 $a+b\pi$ 라고 할 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

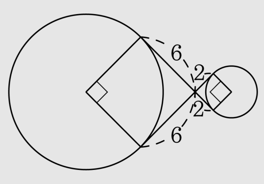


▶ 답 :

▷ 정답 : 28

해설

두 원의 내접선의 길이는 다음 그림에서 $6+2=8$ 이다.



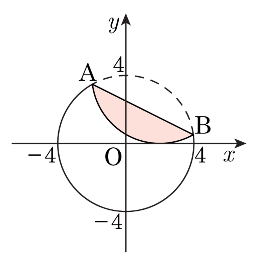
$\therefore$ 벨트의 길이는

$2\times8+\pi\times2\times6\times\frac{270}{360}+\pi\times2\times2\times\frac{270}{360}$

$=16+12\pi$

$\therefore\ a+b=28$

14. 다음 그림과 같이 원 $x^2+y^2=16$ 을 현 AB 를 접는 선으로 하여 접었을 때, 호 AB 가 x 축과 점 $(2,\ 0)$ 에서 접한다. 이 때, 직선 AB 의 방정식을 구하여라.



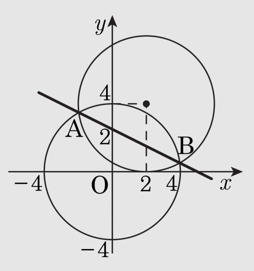
① $x+2y-4=0$　② $x+2y-5=0$

③ $2x+y-6=0$　④ $2x+y-5=0$

⑤ $2x+y-4=0$

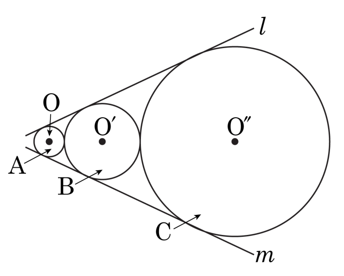
해설

다음 그림과 같이 호 AB 를 일부분으로 하는 원을 그리면, 새로운 원은 반지름의 길이가 4 이고,
x 축과 점 $(2,\ 0)$ 에서 접하므로
중심의 좌표가 $(2,\ 4)$ 가 된다.
즉, 새로운 원의 방정식은
$(x-2)^2+(y-4)^2=16$



이 때, 선분 AB 는 두 원의 공통현이므로 직선 AB 의 방정식은
$x^2+y^2-16-\left\{(x-2)^2+(y-4)^2-16\right\}=0$
$(x^2+y^2-16)-(x^2+y^2-4x-8y+4)=0$
$4x+8y-20=0$
$\therefore\ x+2y-5=0$

15. 다음 그림과 같이 두 직선 l, m 에 접하는 세원 A, B, C 가 서로 외접하고 있다. 두 원 A, B 의 반지름의 길이가 각각 $2, 5$ 일 때, 원 C 의 지름의 길이는? (단, 원의 중심은 일직선 위에 있다.)

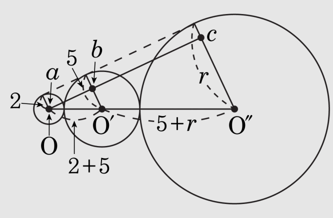


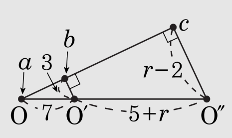
① 15　　② 17　　③ 19

④ 21　　⑤ 25

해설

세 원의 중심을 이은 선분을 빗변으로 하는 직각삼각형을 생각해보자. 원 C 의 반지름을 r 이라고 하면, 다음 두 직각삼각형은 닮음이다.





$\therefore\ \ (2+5) : 3 = (12+r) : (r-2)$

$\Rightarrow\ \ 36 + 3r = 7r - 14$

$\Rightarrow\ \ r = 12.5$

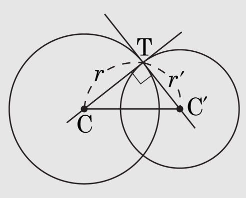
$\therefore$ 지름이 25

16. 두 원 $\begin{cases} x^2+y^2+2x+4y+c=0 \ \cdots ㉠ \\ x^2+y^2+6x-2y+5=0 \ \cdots ㉡ \end{cases}$ 의 교점에서의 접선이 직교할 때 상수 c 의 값은 ?

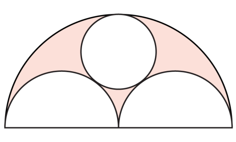
① -3 ② -2 ③ 3 ④ 2 ⑤ 1

해설

㉠ 에서 $(x+1)^2+(y+2)^2=5-c$ 이므로
원 ㉠ 의 중심은 $\mathrm{C}(-1,\ -2)$,
반지름의 길이 $r=\sqrt{5-c}$,
㉡에서 $(x+3)^2+(y-1)^2=5$ 이므로
원 ㉡ 의 중심은 $\mathrm{C'}(-3,\ 1)$,
반지름의 길이 $r'=\sqrt{5}$
따라서, $\overline{\mathrm{CC'}}^2=13$ 이고 그림에서
$\overline{\mathrm{CT}}^2+\overline{\mathrm{C'T}}^2=\overline{\mathrm{CC'}}^2$ 이므로
$r^2+r'^2=\overline{\mathrm{CC'}}^2$
$\therefore\ 5-c+5=13$
$\therefore\ c=-3$



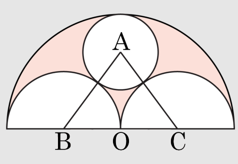
17. 다음 그림과 같이 어떤 큰 반원의 지름 위에 두 개의 합동인 반원이 각각 서로 접하고 또 작은 한 원이 이 세 반원 모두에 접하면서 놓여있다. 이들 사이의 어두운 부분의 넓이가 20π 라 할 때, 합동인 두 반원의 반지름의 길이를 구하여라.



▶ 답 :

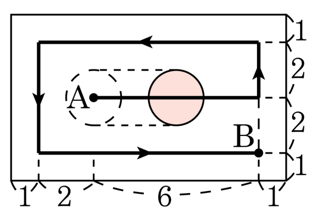
▷ 정답 : 6

해설



합동인 두 원의 반지름을 r,
작은 원의 반지름을 x 라 하자.
$\overline{AB} = r + x$, $\overline{BO} = r$, $\overline{CO} = r$, $\overline{AO} = 2r - x$
$\triangle ABO$ 에서 $r^2 + (2r - x)^2 = (r + x)^2$
$4r^2 - 6rx = 0$
$\Rightarrow \quad 2r(2r - 3x) = 0$
$\therefore \; x = \frac{2}{3}r \quad \cdots \quad ①$
빗금 친 부분의 넓이를 r, x 로 나타내면,
$\frac{1}{2} \times \pi \times (2r)^2 - \frac{1}{2} \times \pi \times r^2 \times 2 - \pi x^2 = 20\pi$
$\Rightarrow \quad r^2 - x^2 = 20 \quad \cdots \quad ②$
① 을 ② 에 대입시키면,
$r^2 - \left(\frac{2}{3}r\right)^2 = 20$
$\Rightarrow \quad \frac{5}{9}r^2 = 20$
$\Rightarrow \quad r = 6 \; (\because \; r > 0)$

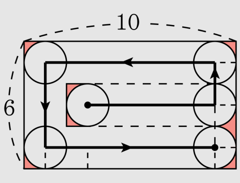
18. 가로의 길이가 10, 세로의 길이가 6 인 오른쪽 그림과 같은 직사각형의 내부에서 반지름의 길이가 1 인 원이 지나간 자리에는 형광 페인트가 칠해진다고 한다. 원의 중심이 그림과 같이 A 부터 B 까지 화살표 방향의 경로를 따라 움직일 때, 직사각형의 영역 중 형광 페인트가 칠해지지 않는 부분의 넓이는? (단, 경로를 구성하는 모든 선분은 직사각형의 변에 평행하거나 수직이다.)



① 0　② $10-\frac{5}{2}\pi$　③ $8-2\pi$
④ $6-\frac{3}{2}\pi$　⑤ $4-\pi$

해설

반지름의 길이가 1 인 원이 화살표 방향을 따라 이동할 때 지나지 않는 부분은 다음 그림에서 어두운 부분이다.
따라서 그 넓이는 한 변의 길이가 2 인 정사각형에서 반지름의 길이가 1 인 원을 제외한 부분의 넓이의 2 배와 같다.
즉 $2(4-\pi)$

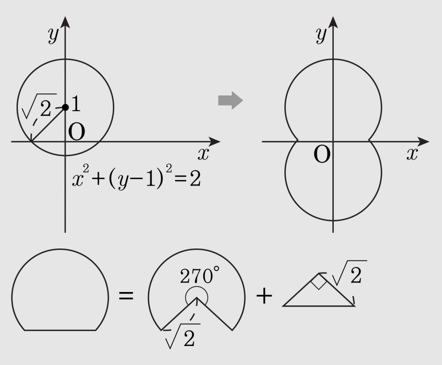


19. 원 $x^2 + (y-1)^2 = 2$ 의 x 축의 위에 있는 부분과 그 부분을 x 축에 대하여 대칭 이동하여 생기는 도형으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① $\pi + 1$ ② $\pi + 2$ ③ $3\pi + 1$

④ $3\pi + 2$ ⑤ $3\pi + 4$

해설



(구하는 넓이)

$$= \left\{\pi \times (\sqrt{2})^2 \times \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2}\right\} \times 2$$

$$= 3\pi + 2$$

20. 좌표평면 위의 원점을 O 라 하고 원 $x^2+y^2-8x-6y+21=0$ 위의 점 P 에 대하여 $\overline{\mathrm{OP}}=d$ 라 할 때, d가 정수가 되도록 하는 점 P 의 개수를 구하면?

▶ 답: ______ 개

▷ 정답: 8개

해설

원 $x^2+y^2-8x-6y+21=0$을
표준형으로 고치면 $(x-4)^2+(y-3)^2=2^2$
중심이 (4, 3) 이고 반지름의 길이가 2 인 원이다.

그림으로 나타내면 다음과 같다.

원 밖의 점 (0, 0) 에서 원의 중심 (4, 3) 까지의
거리가 $\sqrt{4^2+3^2}=5$ 이므로 점 P 가
원 위를 움직일 때, d 의 값은 직선 OP 가
원의 중심을 지날 때, 최솟값 $d=5-2=3$ 과
최대값 $d=5+2=7$ 을 가진다.
따라서 $3\le d\le 7$ 가 되고,
$d=3,\ d=4,\ d=5,\ d=6,\ d=7$ 일 때
정수가 되는 데 $d=4,\ d=5,\ d=6$ 이 되는
점 P 는 두 개씩이 있으므로
$1+2+2+2+1=8$ 모두 8 개이다.