

1. 직선  $x = 2$ 에 접하고, 원  $(x + 3)^2 + y^2 = 1$ 에 외접하는 원의 중심의 자취를 나타내는 식은?

①  $y^2 = -8x$

②  $y^2 = 8x$

③  $y^2 = -12x$

④  $x^2 = -8y$

⑤  $x^2 = 8y$

### 해설

구하는 원의 중심을  $P(x, y)$ 라 놓고  $x, y$  사이의 관계식을 세운다.  
점  $P$ 에서 직선  $x = 2$ 에 내린 수선의 발을  $B$ , 원  $(x + 3)^2 + y^2 = 1$ 의 중심을  $A$ 라고 하면

$$\overline{AP} - 1 = \overline{BP} \text{에서}$$

$$\sqrt{(x + 3)^2 + y^2} - 1 = 2 - x$$

$$\therefore y^2 = -12x$$

2. 원  $x^2 + y^2 = 8$  과 제1사분면에서 접하는 접선이  $x$  축,  $y$  축과 만나는 점을 각각 A, B 라고 할 때, 직각삼각형 OAB 의 넓이의 최솟값을 구하여라. (단, O 는 원점이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

### 해설

제1사분면에서의 원 위의 접점을  $(x_1, y_1)$  이라고 하면 접선의 방정식은  $x_1x + y_1y = 8 \dots\dots \textcircled{1}$  (단,  $x_1 > 0, y_1 > 0$ )

한편, 두 점 A, B 는 각각 접선  $\textcircled{1}$  과  $x$  축,  $y$  축의 교점이므로

$$A\left(\frac{8}{x_1}, 0\right), B\left(0, \frac{8}{y_1}\right)$$

따라서, 직각삼각형 OAB 의 넓이를 S 라고 하면

$$S = \frac{1}{2} \cdot \overline{OA} \cdot \overline{OB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{x_1} \cdot \frac{8}{y_1} = \frac{32}{x_1y_1}$$

이 때,  $(x_1, y_1)$  이 원  $x^2 + y^2 = 8$  위의 점이므로

$$x_1^2 + y_1^2 = 8 \text{ 이고}$$

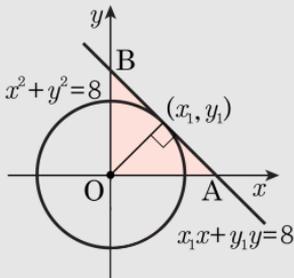
$x_1 > 0, y_1 > 0$  에서

$$\frac{x_1^2 + y_1^2}{2} \geq \sqrt{x_1^2 \cdot y_1^2} = x_1y_1, \quad x_1y_1 \leq 4$$

$$\therefore \frac{1}{x_1y_1} \geq \frac{1}{4} \leftarrow \frac{x_1^2 + y_1^2}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$\therefore S = \frac{32}{x_1y_1} \geq 32 \cdot \frac{1}{4} = 8 \text{ (단, 등호는 } x_1 = y_1 \text{ 일 때 성립)}$$

따라서, 구하는 넓이의 최소의 값은 8 이다.



3. 점  $(3, -1)$  에서 원  $x^2 + y^2 = 5$  에 그은 두 접선과  $y$  축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이를  $S$  라 할 때,  $4S$  의 값은?

① 33

② 35

③ 45

④ 49

⑤ 55

### 해설

접선의 기울기를  $m$  이라고 하면 점  $(3, -1)$  에서

원에 그은 접선의 방정식을  $y + 1 = m(x - 3)$  이라 하자.

이 때, 원의 중심  $(0, 0)$  에서 직선  $y + 1 = m(x - 3)$ ,

즉  $mx - y - 3m - 1 = 0$  에 이르는 거리가 반지름의 길이  $\sqrt{5}$  와 같으므로

$$\frac{|-3m - 1|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = \sqrt{5}, |3m + 1| = \sqrt{5(m^2 + 1)}$$

양변을 제곱하여 정리하면  $2m^2 + 3m - 2 = 0$ ,  $(2m - 1)(m + 2) = 0$

$$\therefore m = \frac{1}{2} \text{ 또는 } m = -2$$

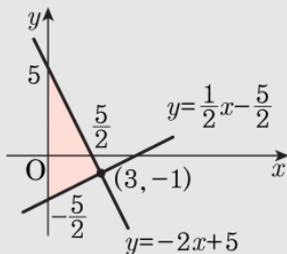
즉, 구하는 접선의 방정식은

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}, y = -2x + 5$$

따라서 구하는 삼각형의 넓이  $S$  는

$$S = \frac{1}{2} \times \left\{ 5 - \left(-\frac{5}{2}\right) \right\} \times 3 = \frac{45}{4}$$

$$\therefore 4S = 45$$



4. 두 원  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $x^2 + (y-3)^2 = 4$ 의 공통접선의 방정식이  $y = mx + n$  일 때,  $m^2 + n^2$ 의 값은?(단,  $m \neq 0$ )

① 15

② 16

③ 17

④ 18

⑤ 19

### 해설

원  $x^2 + y^2 = 1$ 의 중심  $(0, 0)$ 에서

직선  $y = mx + n$ ,

즉  $mx - y + n = 0$ 에 이르는 거리가 1이므로

$$\frac{|n|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = 1$$

$$\therefore m^2 = n^2 - 1 \dots \textcircled{㉠}$$

원  $x^2 + (y-3)^2 = 4$ 의 중심  $(0, 3)$ 에서

직선  $mx - y + n = 0$ 에 이르는 거리가 2이므로

$$\frac{|-3 + n|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = 2$$

$$\therefore n^2 - 6n + 9 = 4m^2 + 4 \dots \textcircled{㉡}$$

㉠을 ㉡에 대입하면,

$$n^2 - 6n + 9 = 4(n^2 - 1) + 4, 3n^2 + 6n - 9 = 0$$

$$n^2 + 2n - 3 = 0, (n+3)(n-1) = 0$$

$$\therefore n = -3 \text{ 또는 } n = 1$$

이 때,  $n = 1$ 이면  $m = 0$ 이 되므로  $n = -3$

$$n = -3 \text{ 을 } \textcircled{㉠} \text{ 에 대입하면 } m^2 = 8$$

$$\therefore m^2 + n^2 = 8 + 9 = 17$$

5. 두 점 A(1,1), B(7,4) 에서 이르는 거리의 비가 2 : 1 인 임의의 점 P 에 대하여  $\triangle ABP$  의 넓이가 최대일 때,  $\tan(\angle PAB)$  의 값은?

①  $\frac{1}{5}$

②  $\frac{1}{4}$

③  $\frac{1}{3}$

④  $\frac{1}{2}$

⑤ 1

해설

점 P 의 자취는 선분 AB 를 2 : 1 로 내분하는 점 C 와 2 : 1 로 외분하는 점 D 를

지름의 양 끝으로 하는 원이다.

점 C 의 좌표는

$$\left(\frac{14+1}{2+1}, \frac{8+1}{2+1}\right), \text{ 즉 } C(5,3)$$

점 D 의 좌표는

$$\left(\frac{14-1}{2-1}, \frac{8-1}{2-1}\right) \text{ 즉, } D(13,7)$$

따라서, CD 의 중점 M 의 좌표는

$$\left(\frac{5+13}{2}, \frac{3+7}{2}\right)$$

즉, M(9,5) 이므로

$$\overline{CM} = \sqrt{(9-5)^2 + (5-3)^2} = 2\sqrt{5}$$

따라서, 점 P 의 자취는 중심의 좌표가

(9,5) 이고 반지름의 길이가

$2\sqrt{5}$  인 원이므로 자취의 방정식은

$$(x-9)^2 + (y-5)^2 = 20$$

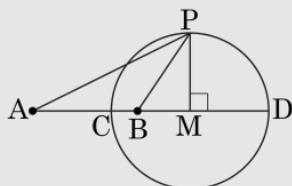
그런데 다음 그림에서  $\triangle ABP$  의 넓이가 최대인

경우는 선분 AM 과 선분 PM 이 수직인 경우이다.

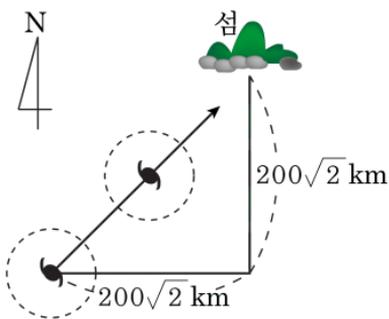
이 때,  $\overline{AM} = \sqrt{(9-1)^2 + (5-1)^2} = 4\sqrt{5}$ ,

$\overline{PM} = 2\sqrt{5}$  이므로

$$\tan(\angle PAB) = \tan(\angle PAM) = \frac{2\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} = \frac{1}{2}$$



6. 반지름의 길이가 10km 인 원 모양의 섬이 있다. 현재 태풍의 중심은 이 섬의 중심으로부터 남쪽으로  $200\sqrt{2}$ km, 서쪽으로  $200\sqrt{2}$ km 떨어진 곳에서 시속 10km 의 속력으로 북동쪽으로 진행하고 있다. 태풍의 중심에서 30km 이내가 폭풍우권이라고 할 때, 처음으로 이 섬 전체가 폭풍우권에 들어가는데 걸리는 시간은 몇 시간인지 구하면?(단, 폭풍우권의 크기는 일정하다.)



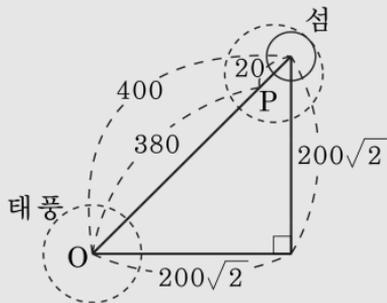
▶ 답 : 시간

▷ 정답 : 38 시간

### 해설

태풍이 O 에서 출발하여 P 지점에 도착하면 섬 전체가 폭풍우권에 들어간다.

$\overline{OP} = 380$ (km) 이므로 걸리는 시간은 38 시간

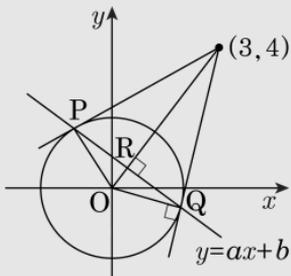


7. 한 점 A(3,4) 에서 원  $x^2 + y^2 = 4$  에 접선을 그을 때생기는 두 접점을 지나는 직선의 방정식을 구하면?

- ①  $3x + 4y = 1$       ②  $3x + 4y = 2$       ③  $3x + 4y = 3$   
 ④  $3x + 4y = 4$       ⑤  $3x + 4y = 5$

해설

구하는 직선의 방정식을  $y = ax + b$  라고 하면

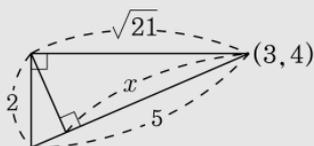


구하고자 하는 직선은 원점과 (3, 4) 를 이은 선분에 수직이므로

$$\frac{4}{3} \cdot a = -1 \quad \therefore a = -\frac{3}{4}$$

$$y = -\frac{3}{4}x + b, \quad 3x + 4y - 4b = 0 \quad \dots\dots (1)$$

접선과의 두 교점을 P, Q 라 할때 다음과 같다.



$y = ax + b$  와 (3, 4) 와 거리가  $x$  일때,

삼각형의 닮음조건에 의해서

$$5 : \sqrt{21} = \sqrt{21} : x$$

$$\therefore x = \frac{21}{5}$$

따라서, 원점과 직선과의 거리는

$$5 - \frac{21}{5} = \frac{4}{5}$$

즉, (0, 0)에서 직선 (1)에 이르는 거리는

$$\frac{|-4b|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{4}{5}$$

$$4|b| = 4 \quad b = 1 \quad (\because b > 0)$$

$$\therefore 3x + 4y = 4$$

8. 좌표평면에서 중심이  $(a, b)$  이고  $x$  축에 접하는 원이 두 점  $A(0, 5)$  와  $B(8, 1)$  을 지난다. 이 때, 원의 중심  $(a, b)$  와 직선  $AB$  사이의 거리는? (단,  $0 \leq a \leq 8$ )

①  $\sqrt{3}$

②  $\sqrt{5}$

③  $\sqrt{6}$

④  $\sqrt{7}$

⑤  $2\sqrt{2}$

해설

주어진 원이  $x$  축에 접하므로 그 방정식은

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = b^2$$

$$\therefore x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 = 0$$

이 원이 두 점  $A(0, 5), B(8, 1)$  을 지나므로

$$a^2 - 10b + 25 = 0, a^2 - 16a - 2b + 65 = 0$$

두 식을 연립하면

$$4a^2 - 80a + 300 = 0, 4(a-5)(a-15) = 0$$

그런데

$0 \leq a \leq 8$  이므로  $a = 5, b = 5$  이다.

이 때, 직선  $AB$  의 방정식은

$$y - 5 = \frac{1-5}{8-0}(x-0)$$

$$\therefore x + 2y - 10 = 0$$

따라서 원의 중심  $(5, 5)$  와 직선  $AB$  사이의 거리  $d$  는

$$d = \frac{|5 + 2 \cdot 5 - 10|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \sqrt{5}$$

9. 두 점  $A(-5, -2)$ ,  $B(2, 5)$  에 대하여 원  $x^2 + y^2 = 9$  위를 움직이는 점을  $P$  라고 할 때,  $\triangle ABP$  의 무게중심  $G$  는 중심이  $(a, b)$  이고 반지름이  $c$  인 원 위를 움직이게 된다. 이 때,  $a + b + c$  의 값을 구하면?

- ① 1                      ② 2                      ③ 3                      ④ -1                      ⑤ 0

해설

$P = (\alpha, \beta)$  라 하면,

$$G = \left( \frac{-5 + 2 + \alpha}{3}, \frac{-2 + 5 + \beta}{3} \right)$$

$$= \left( -1 + \frac{\alpha}{3}, 1 + \frac{\beta}{3} \right)$$

$-1 + \frac{\alpha}{3} = p$ ,  $1 + \frac{\beta}{3} = q$  라 하면,

$\alpha = 3p + 3$ ,  $\beta = 3q - 3$ ,  $\alpha^2 + \beta^2 = 9$  이므로

$$\therefore (3p + 3)^2 + (3q - 3)^2 = 9$$

$$\Rightarrow (p + 1)^2 + (q - 1)^2 = 1$$

$\Rightarrow$  중심이  $(-1, 1)$  이고, 반지름이 1 인 원

$$\therefore a + b + c = 1$$

10. 이차곡선  $x^2 + y^2 + ax + by + 7 = 0$  이 반지름 1인 원을 표시한다. 이 원의 중심  $a, b$  가 변할 때, 이 도형의 자취의 길이를 구하면?

①  $\sqrt{2}\pi$

②  $2\sqrt{2}\pi$

③  $3\sqrt{2}\pi$

④  $4\sqrt{2}\pi$

⑤  $6\sqrt{2}\pi$

해설

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2 - 28}{4}$$

$$\frac{a^2 + b^2 - 28}{4} = 1 \text{ 에서}$$

$$a^2 + b^2 = 32 \cdots \text{㉠}$$

중심  $\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$  에서

$$x = -\frac{a}{2}, y = -\frac{b}{2} \text{ 이므로}$$

$a = -2x, b = -2y$  를 ㉠에 대입하면

$$4x^2 + 4y^2 = 32 \quad \therefore x^2 + y^2 = 8$$

$$\therefore 2\pi r = 4\sqrt{2}\pi$$

11. 두 원  $x^2 + y^2 + 2x - 2my + m^2 - 4 = 0$ ,  $x^2 + y^2 - 2mx - 2y + m^2 - 8 = 0$   
이 직교할 때  $m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답:  $\sqrt{6}$

▷ 정답:  $-\sqrt{6}$

### 해설

두 원의 교점에서 접선이 수직이므로

$$(x+1)^2 + (y-m)^2 = 5$$

$$(x-m)^2 + (y-1)^2 = 9$$

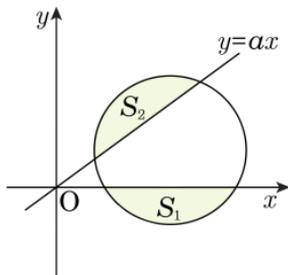
두 원의 교점과 각 원의 중심이 직각삼각형을 이루므로

$$(m+1)^2 + (1-m)^2 = 14$$

$$m^2 = 6$$

$$m = \pm\sqrt{6}$$

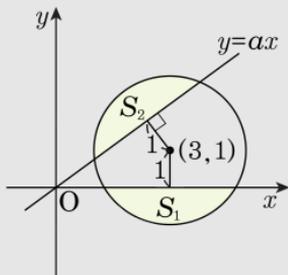
12. 아래 그림에서 원  $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 4$  와  $x$  축으로 둘러싸인 부분의 넓이를  $S_1$ , 직선  $y = ax$  로 둘러싸인 부분의 넓이를  $S_2$  라 하자.  $S_1 = S_2$  일 때,  $100a$  의 값을 구하면?



▶ 답 :

▷ 정답 : 75

해설

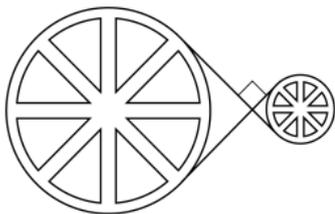


$S_1 = S_2$  이면, 중심  $(3, 1)$  에서  
직선  $y = ax$  까지 거리는 1 이다.

따라서  $1 = \frac{|3a - 1|}{\sqrt{a^2 + 1}}$  이고  $a = \frac{3}{4}$  이다.

$\therefore 100a = 75$

13. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 6, 2 인 두 원판을  $\infty$  모양으로 벨트를 채웠는데 가운데 부분이 수직으로 만난다고 한다. 이 벨트의 길이를  $a + b\pi$  라고 할 때,  $a + b$  의 값을 구하여라.



▶ 답:

▶ 정답: 28

해설

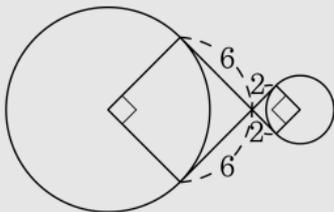
두 원의 내접선의 길이는 다음 그림에서  $6 + 2 = 8$  이다.

$\therefore$  벨트의 길이는

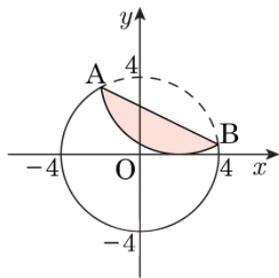
$$2 \times 8 + \pi \times 2 \times 6 \times \frac{270}{360} + \pi \times 2 \times 2 \times \frac{270}{360}$$

$$= 16 + 12\pi$$

$$\therefore a + b = 28$$



14. 다음 그림과 같이 원  $x^2 + y^2 = 16$  을 현 AB 를 접는 선으로 하여 접었을 때, 호 AB 가  $x$  축과 점  $(2, 0)$  에서 접한다. 이 때, 직선 AB 의 방정식을 구하여라.



- ①  $x + 2y - 4 = 0$     ②  $x + 2y - 5 = 0$   
 ③  $2x + y - 6 = 0$     ④  $2x + y - 5 = 0$   
 ⑤  $2x + y - 4 = 0$

### 해설

다음 그림과 같이 호 AB 를 일부분으로 하는 원을 그리면, 새로운 원은 반지름의 길이가 4 이고,

$x$  축과 점  $(2, 0)$  에서 접하므로  
 중심의 좌표가  $(2, 4)$  가 된다.

즉, 새로운 원의 방정식은

$$(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 16$$

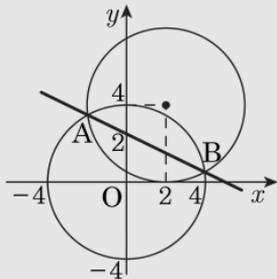
이 때, 선분 AB 는 두 원의 공통현이므로 직선 AB 의 방정식은

$$x^2 + y^2 - 16 - \{(x - 2)^2 + (y - 4)^2 - 16\} = 0$$

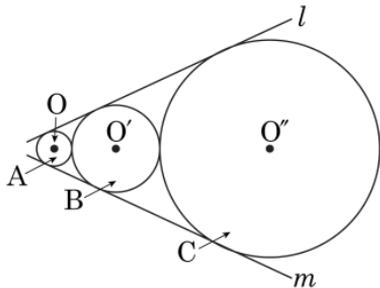
$$(x^2 + y^2 - 16) - (x^2 + y^2 - 4x - 8y + 4) = 0$$

$$4x + 8y - 20 = 0$$

$$\therefore x + 2y - 5 = 0$$



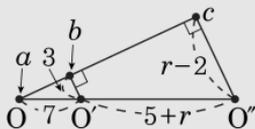
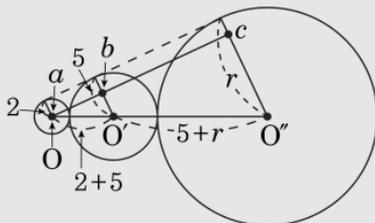
15. 다음 그림과 같이 두 직선  $l, m$  에 접하는 세 원 A, B, C 가 서로 외접하고 있다. 두 원 A, B 의 반지름의 길이가 각각 2, 5 일 때, 원 C 의 지름의 길이는? (단, 원의 중심은 일직선 위에 있다.)



- ① 15      ② 17      ③ 19  
 ④ 21      ⑤ 25

해설

세 원의 중심을 이은 선분을 빗변으로 하는 직각삼각형을 생각해 보자. 원 C 의 반지름을  $r$  이라고 하면, 다음 두 직각삼각형은 닮음이다.



$$\begin{aligned} \therefore (2+5) : 3 &= (12+r) : (r-2) \\ \Rightarrow 36+3r &= 7r-14 \\ \Rightarrow r &= 12.5 \\ \therefore \text{지름이 } 25 \end{aligned}$$

16. 두 원  $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x + 4y + c = 0 \cdots \textcircled{1} \\ x^2 + y^2 + 6x - 2y + 5 = 0 \cdots \textcircled{2} \end{cases}$  의 교점에서의 접선이 직  
교할 때 상수  $c$  의 값은 ?

- ① -3      ② -2      ③ 3      ④ 2      ⑤ 1

해설

① 에서  $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 5-c$  이므로

원 ① 의 중심은  $C(-1, -2)$ ,

반지름의 길이  $r = \sqrt{5-c}$ ,

② 에서  $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 5$  이므로

원 ② 의 중심은  $C'(-3, 1)$ ,

반지름의 길이  $r' = \sqrt{5}$

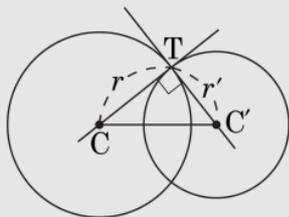
따라서,  $\overline{CC'}^2 = 13$  이고 그림에서

$\overline{CT}^2 + \overline{C'T}^2 = \overline{CC'}^2$  이므로

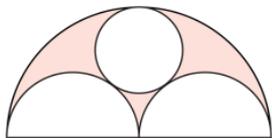
$$r^2 + r'^2 = \overline{CC'}^2$$

$$\therefore 5 - c + 5 = 13$$

$$\therefore c = -3$$



17. 다음 그림과 같이 어떤 큰 반원의 지름 위에 두 개의 합동인 반원이 각각 서로 접하고 또 작은 원이 이 세 반원 모두에 접하면서 놓여있다. 이들 사이의 어두운 부분의 넓이가  $20\pi$  라 할 때, 합동인 두 반원의 반지름의 길이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

합동인 두 원의 반지름을  $r$ ,  
작은 원의 반지름을  $x$  라 하자.

$$\overline{AB} = r + x, \overline{BO} = r, \overline{CO} = r, \overline{AO} = 2r - x$$

$$\triangle ABO \text{ 에서 } r^2 + (2r - x)^2 = (r + x)^2$$

$$4r^2 - 6rx = 0$$

$$\Rightarrow 2r(2r - 3x) = 0$$

$$\therefore x = \frac{2}{3}r \quad \dots \text{ ①}$$

빛금 친 부분의 넓이를  $r, x$  로 나타내면,

$$\frac{1}{2} \times \pi \times (2r)^2 - \frac{1}{2} \times \pi \times r^2 \times 2 - \pi x^2 = 20\pi$$

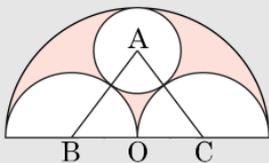
$$\Rightarrow r^2 - x^2 = 20 \quad \dots \text{ ②}$$

① 을 ② 에 대입시키면,

$$r^2 - \left(\frac{2}{3}r\right)^2 = 20$$

$$\Rightarrow \frac{5}{9}r^2 = 20$$

$$\Rightarrow r = 6 \quad (\because r > 0)$$





19. 원  $x^2 + (y - 1)^2 = 2$  의  $x$  축의 위에 있는 부분과 그 부분을  $x$  축에 대하여 대칭 이동하여 생기는 도형으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

①  $\pi + 1$

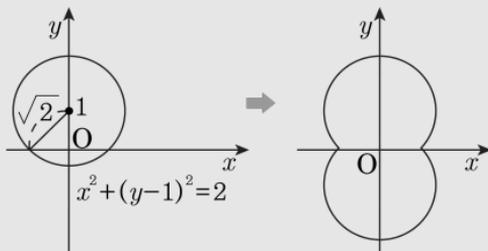
②  $\pi + 2$

③  $3\pi + 1$

④  $3\pi + 2$

⑤  $3\pi + 4$

해설



(구하는 넓이)

$$= \left\{ \pi \times (\sqrt{2})^2 \times \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} \right\} \times 2$$

$$= 3\pi + 2$$

