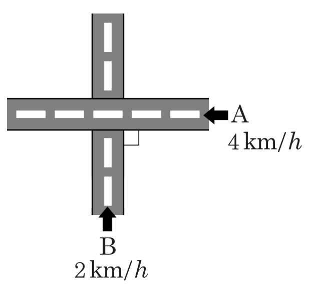
1. 그림과 같이 수직으로 만나는 도로가 있다. 교차점에서 A는 동쪽으로 6 km, B는 남쪽으로 4 km지점에 있다. 지금 A는 시속 4 km의 속도로 서쪽으로, B는 시속 2 km의 속도로 북쪽을 향하여 동시에 출발했을 때 A, B 사이의 거리가 가장 짧을 때는 출발 후 몇 시간 후인가?



① 1 시간 후 ② 1.2 시간 후 ③ 1.4 시간 후
④ 1.6 시간 후 ⑤ 2 시간 후

해설

동서를 x 축, 남북을 y 축으로 잡으면
최초의 A, B 의 위치는 A(6, 0) , B(0, −4) 이고
t 시간 후의 A, B 의 좌표는
$A(6-4t,\ 0)$, $B(0, -4+2t)$ 이다.
따라서 t 시간 후의 $\overline{AB}$ 의 거리는 s 는

$$s = \sqrt{(6-4t)^2+(-4+2t)^2}$$
$$= \sqrt{20t^2-64t+52}$$
$$= \sqrt{20\left(t^2-\frac{64}{20}t\right)+52}$$
$$= \sqrt{20\left(t-\frac{8}{5}\right)^2+\frac{4}{5}} \text{ 이므로}$$

$t = \frac{8}{5}$ 일 때 최소가 된다.
∴ 출발 후 1.6 시간 후이다.

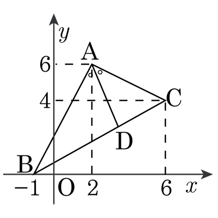
2. 점 $(1,\ -1)$ 에서 직선 $ax+by=0(a\neq 0,\ b\neq 0)$ 까지의 거리가 $\sqrt{2}$ 일 때, 상수 $a,\ b$ 의 관계를 바르게 설명한 것은?

① $a-b=0$ ② $a-b=\sqrt{2}$ ③ $a+b=0$
④ $ab=0$ ⑤ $ab=\sqrt{2}$

해설

$\dfrac{|a\times 1+b\times(-1)|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{|a-b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sqrt{2}$
$|a-b|=\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}$
양변을 제곱하면 $a^2-2ab+b^2=2a^2+2b^2$
$a^2+2ab+b^2=0,\ (a+b)^2=0$
따라서 $a+b=0$

3. 다음 그림과 같이 세 점 $A(2,6)$, $B(-1,0)$, $C(6,4)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC에서 $\angle A$의 이등분선이 변 BC와 만나는 점을 D라고 할 때, 점 D의 좌표는?



① $\left(2, \frac{6}{5}\right)$ ② $\left(\frac{12}{5}, \frac{8}{5}\right)$ ③ $\left(\frac{14}{5}, 2\right)$

④ $\left(\frac{16}{5}, \frac{12}{5}\right)$ ⑤ $\left(\frac{18}{5}, \frac{14}{5}\right)$

해설

점 D는 $\angle A$의 이등분선과 변 BC의 교점이므로

$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{DC}$ 이다.

$\overline{AB} = \sqrt{(-3)^2 + (-6)^2} = 3\sqrt{5}$,

$\overline{AC} = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{5}$ 이므로

$\overline{BD} : \overline{DC} = 3 : 2$

따라서 점 D는 선분 BC를 $3 : 2$로 내분하는 점이므로

점 D의 좌표는 $\left(\frac{18-2}{3+2}, \frac{12+0}{3+2}\right)$

$\therefore \left(\frac{16}{5}, \frac{12}{5}\right)$

4. 길이 3인 선분 AB의 양 끝점 A, B가 각각 x축, y축 위를 움직일 때, 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점 P의 자취를 구하면?

① $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ ② $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$ ③ $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$
④ $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ ⑤ $x^2 + 3y^2 = 6$

해설

A$(a,\ 0)$, B$(0,\ b)$, P$(x,\ y)$라 하면
$\overline{\mathrm{AB}} = 3$이므로 $\sqrt{a^2 + b^2} = 3$
$a^2 + b^2 = 9 \cdots$ ㉠

P$(x,\ y)$는 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점이므로 $x = \frac{a}{3}$, $y = \frac{2b}{3}$

$\therefore a = 3x,\ b = \frac{3y}{2} \cdots$ ㉡

㉡를 ㉠에 대입하면 $9x^2 + \frac{9}{4}y^2 = 9$

$\therefore x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$

5. 좌표평면 위의 점 $P(3,\ 5)$ 를 지나고 기울기가 정수인 직선 중 x 절편과 y 절편이 모두 정수인 직선의 개수는?

① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

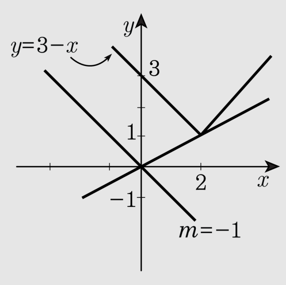
해설

점 $P(3,\ 5)$ 를 지나고 기울기가
m(m 은정수) 인 직선의 방정식은
$y-5=m(x-3)\cdots$①
①의 x 절편은 $-5=m(x-3)$
$\therefore\ \ x=3-\dfrac{5}{m}$
①의 y 절편은 $y-5=-3m\ \ \therefore\ \ y=5-3m$
이 때, 정수 m 에 대하여 x 절편과 y 절편이 모두 정수가 되기 위해서는 m 의 값이 5 의 약수(음수 포함)이어야 한다.
$\therefore\ \ m=1,\ 5,\ -1,\ -5$
따라서, x 절편과 y 절편이 모두 정수인 직선은
4개이다

6. $y = |x-2|+1$, $y = mx$에 대해 두 식을 동시에 만족하는 $(x,\ y)$가 존재하지 않을 때, m 의 값의 범위는?

① $-1 < m < \frac{1}{2}$ ② $-1 \le m < \frac{1}{2}$ ③ $-\frac{1}{2} < m < 1$
④ $-\frac{1}{2} \le m < 1$ ⑤ $-\frac{1}{2} \le m < 0$

해설

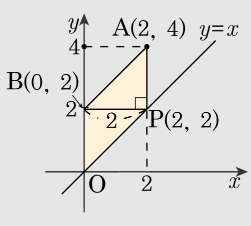


A : $y = |x-2|+1$
B : $y = mx$ 라고 하면
A : $x \ge 2 \ \rightarrow \ y = x-1$
$x < 2 \ \rightarrow \ y = 3-x$
B : $y = mx$가 점 $(2,\ 1)$을 지날 때 보다
아래에 있으므로 $1 > 2m \ \rightarrow \ m < \frac{1}{2}$
$y = mx$ 의 기울기 $m \ge -1$ 이어야 하므로
$\therefore \ -1 \le m < \frac{1}{2}$

7. 직선 $y = x$ 위의 점 P가 두 점 $\mathrm{A}(2, 4)$, $\mathrm{B}(0, 2)$로부터 같은 거리에 있을 때, 사각형 ABOP의 넓이는? (단, O는 원점)

① 2　　② 4　　③ 6　　④ 8　　⑤ 10

해설



점 P의 좌표를 $(a,\ a)$으로 놓으면

$\overline{\mathrm{AP}} = \overline{\mathrm{BP}}$에서 $\sqrt{(a-2)^2 + (a-4)^2} = \sqrt{a^2 + (a-2)^2}$

양변 제곱하여 정리하면

$2a^2 - 12a + 20 = 2a^2 - 4a + 4,\ 8a = 16$

$\therefore\ a = 2$

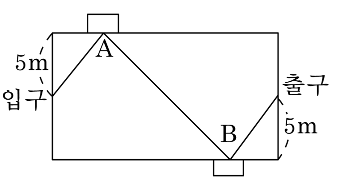
따라서 점 P의 좌표는 $(2,\ 2)$이므로 다음 그림에서

(□ABOP의 넓이)

$= (\triangle\mathrm{OBP}$의 넓이$) + (\triangle\mathrm{ABP}$의 넓이$)$

$= \dfrac{1}{2} \times 2 \times 2 + \dfrac{1}{2} \times 2 \times 2 = 4$

8. 다음 그림과 같은 전시장에서 관광객이 전시물을 보기 위한 이동 거리를 최소로 하려한다. 전시물 A, B가 있을 때, 전시물 A의 위치는 왼쪽에서 몇 m떨어져 있어야 하는지 구하여라.(단, 이 전시장은 가로 20 m, 세로 10 m인 직사각형 모양이다.)

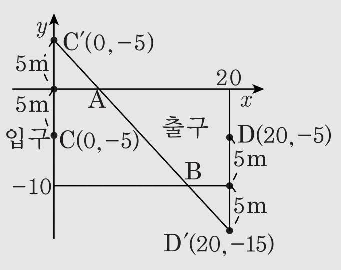


▶ 답 : ______ m

▷ 정답 : 5 m

해설

전시장의 입구를 점 C(0, −5), 출구를 점 D(20, −5)라 하자.
점 C(0, −5)를 x축에 대하여 대칭이동한 점은 C′(0, 5)
점 D(20, −5)를 직선 $y = -10$에 대해 대칭이동한 점은 D′(20, −15)이다.



이 때, 직선 C′D′의 방정식은 $y = -x + 5$이다.
점 A의 좌표는 직선 C′D′이 x축과 만나는 점이므로 (5, 0)이다.
따라서, 왼쪽에서 5 m 떨어진 곳에 전시물 A가 위치해야 한다.

9. 평면 위에서 질량이 같은 질점들을 한 점을 중심으로 가장 쉽게 회전시키려면 각 점으로부터 회전중심까지의 거리의 제곱의 합이 가장 작아야 한다. 평면 위의 점 O(0, 0), A(2, 0), B(2, 1) 에 각각 질량이 같은 질점이 놓여 있을 때 이들 세 질점을 가장 쉽게 회전시키는 회전 중심 P의 좌표는?

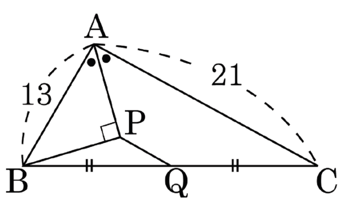
① $P(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ ② $P(\frac{4}{3}, \frac{1}{3})$ ③ $P(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$
④ $P(1, \frac{1}{2})$ ⑤ $P(2, \frac{1}{2})$

해설

$P(x,\ y)$ 라고 하면 $\overline{OP}^2 + \overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 = x^2 + y^2 + (x-2)^2 + y^2 + (x-2)^2 + (y-1)^2 = 3x^2 - 8x + 3y^2 - 2y + 9 = 3\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 + 3\left(y - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{10}{3}$

이 값을 최소가 되게 하는 점 $P(\frac{4}{3}, \frac{1}{3})$ 는 $\triangle ABC$ 의 무게중심이다.

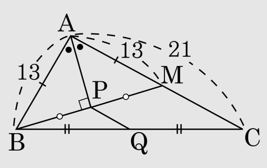
10. 다음 그림과 같이 $\triangle ABC$ 에서 선분 AP 는 $\angle BAC$ 의 이등분선, $\overline{AP} \perp \overline{BP}$ 이고 점 Q 는 변 BC 의 중점이다. $\overline{AB} = 13$, $\overline{AC} = 21$ 일 때, $\overline{PQ}$ 의 길이는?



① 4　　② 5　　③ 6　　④ 7　　⑤ 8

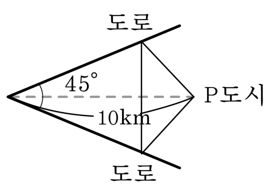
해설

$\overline{BP}$ 의 연장선이 $\overline{AC}$ 와 만나는 점을 M 이라 하자.



$\angle BAP = \angle MAP$, $\overline{AP}$ 는 공통,
$\angle APB = \angle R$ 이므로 $\triangle ABP \equiv \triangle AMP$
$\overline{AB} = \overline{AM} = 13$ 이다.
따라서 $\overline{MC} = 8$
$\triangle BCM$ 에서 $\overline{PQ} : \overline{MC} = 1 : 2$ 이므로 $\overline{PQ} = 4$

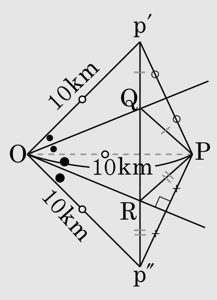
11. 다음 그림과 같이 두 개의 도로가 $45°$ 의 각도로 교차하고 있다. 교차점에서 10 km 떨어진 도시 P 와 두 도로 사이를 연결하는 삼각형 모양의 새로운 도로를 건설할 때, 건설해야 할 도로의 최소 길이는?



① $10\sqrt{2}$ km ② $12\sqrt{2}$ km ③ $14\sqrt{2}$ km
④ $16\sqrt{2}$ km ⑤ $18\sqrt{2}$ km

해설

점 P 의 두 도로에 대한 대칭점을 각각 P', P'' 이라 하면 $\overline{PQ} + \overline{QR} + \overline{RP} = \overline{P'Q} + \overline{QR} + \overline{RP''}$ 이고 $\overline{P'P''}$ 가 최단거리가 된다. $\triangle P'OP''$ 가 직각이등변 삼각형이므로 피타고라스의 정리에 의하여 $\overline{P'P''}^2 = 10^2 + 10^2 = 200 \quad \therefore \ \overline{P'P''} = 10\sqrt{2}$



12. 네 점 $A(a,\ 2)$, $B(3,\ 1)$, $C(2,\ -3)$, $D(b,\ -2)$를 꼭짓점으로 하는 □ABCD가 마름모가 되게 하는 실수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은? (단, $a>0$)

① 11　② 12　③ 13　④ 14　⑤ 15

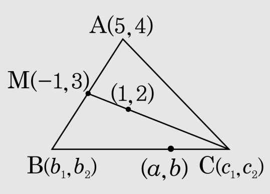
해설

마름모는 평행사변형이므로
$\overline{AC}$의 중점과 $\overline{BD}$의 중점이 일치한다.
즉, $\left(\frac{a+2}{2},\ \frac{2+(-3)}{2}\right)=\left(\frac{3+b}{2},\ \frac{1+(-2)}{2}\right)$에서 $\frac{a+2}{2}=\frac{b+3}{2}$
$\therefore\ a-b=1\cdots$ ㉠
이 때, 평행사변형이 마름모가 되려면 이웃하는 두 변의 길이가 같아야 한다. 즉, $\overline{AB}=\overline{BC}$이어야 하므로
$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2$에서
$(3-a)^2+(1-2)^2=(2-3)^2+(-3-1)^2$
$a^2-6a+10=17$, $a^2-6a-7=0$
$(a-7)(a+1)=0$
$\therefore\ a=7(\because\ a>0)$
이것을 ㉠에 대입하면 $b=6$
$\therefore\ a+b=13$

13. 삼각형 ABC 에서 꼭지점 A 의 좌표가 (5, 4) , 변 AB 의 중점 M 의 좌표가 (−1, 3) , 무게중심의 좌표가 (1, 2) 일 때 변 BC 를 2 : 1 로 내분하는 점의 좌표는 $(a,\ b\ )$ 라 한다. 이 때, $a+b$ 의 값은?

① $\frac{1}{3}$　　② $\frac{2}{3}$　　③ 1　　④ $\frac{4}{3}$　　⑤ $\frac{5}{3}$

해설



B 의 좌표를 $(b_1,\ b_2)$, C 의 좌표를 $(c_1,\ c_2)$ 라고 하면

$\overline{\mathrm{AB}}$ 의 중점의 좌표가

$\left(\frac{b_1+5}{2},\ \frac{b_2+4}{2}\right)$ 이므로

$\frac{b_1+5}{2}=-1, \frac{b_2+4}{2}=3$ 이다.

따라서 $b_1=-7,\ b_2=2$

즉 B(−7, 2)

$\overline{\mathrm{CM}}$ 을 2 : 1 로 내분하는 점이

△ABC 의 무게중심이므로

$\left(\frac{2\times(-1)+1\times c_1}{2+1},\ \frac{2\times 3+1\times c_2}{2+1}\right)=(1,\ 2)$

$\left(\frac{c_1-2}{3},\ \frac{6+c_2}{3}\right)=(1,\ 2)$ 에서 $c_1=5,\ c_2=0$

$\overline{\mathrm{BC}}$ 의 2 : 1 로 내분점을 계산하면,

$\left(\frac{2\times 5+1\times(-7)}{2+1},\ \frac{2\times 0+1\times 2}{2+1}\right)=\left(1,\ \frac{2}{3}\right)$

따라서 $a+b=\frac{5}{3}$ 가 된다.

14. 좌표평면 위의 세 점 $A(3,\ 4)$, $B(0,\ 0)$, $C(8,\ -8)$에 대하여 $\angle BAC$의 이등분선이 선분 BC와 만나는 교점의 좌표는?

① $\left(\frac{1}{8},\ -\frac{1}{8}\right)$ ② $\left(\frac{20}{9},\ -\frac{20}{9}\right)$ ③ $\left(\frac{15}{11},\ -\frac{15}{11}\right)$
④ $\left(\frac{25}{13},\ -\frac{25}{13}\right)$ ⑤ $\left(\frac{28}{17},\ -\frac{28}{17}\right)$

해설

$\overline{AB} = \sqrt{3^2+4^2} = 5$

$\overline{AC} = \sqrt{(8-3)^2+(-8-4)^2} = \sqrt{5^2+12^2} = 13$

$\angle BAC$ 의 이등 분선이 선분 BC 와 만나는 교점을 $D(x,y)$ 라 하면 각의 이등분선의 성질에 의하여

$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{DC} = 5 : 13$

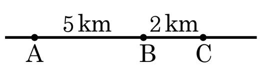
따라서, 점 $D(x,y)$는 선분 BC 를 $5 : 13$ 으로 내분하는 점이므로

$x = \dfrac{5\cdot 8+13\cdot 0}{5+13} = \dfrac{20}{9}$,

$y = \dfrac{5\cdot(-8)+13\cdot 0}{5+13} = -\dfrac{40}{18} = -\dfrac{20}{9}$

$\therefore\ D\left(\dfrac{20}{9}, -\dfrac{20}{9}\right)$

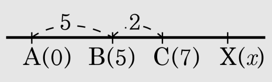
15. 직선 도로가 통과하는 세 마을 A, B, C가 있다. 마을 A와 마을 B사이의 거리는 5 km, 마을 B와 마을 C사이의 거리는 2 km이다. 이 도로 위에 마을 X가 있는데, 마을 X와 마을 A사이의 거리는 마을 X와 마을 C사이의 거리의 2배이다. 마을 X와 마을 B사이의 거리는? (단, 마을 X는 마을 A와 B사이에 있다.)



① $\frac{1}{5}$ km　② $\frac{1}{4}$ km　③ $\frac{1}{3}$ km　④ $\frac{1}{2}$ km　⑤ 1 km

해설

다음 그림과 같이 직선도로를 수직선, 마을 A를 원점으로 하면



A(0), B(5), C(7)이다. 이 때 X(x)

A와 X사이의 거리는 C와 X사이의 거리의 2배이므로

$|x-0| = 2|x-7|$, $|x| = 2|x-7|$

$\therefore\ 2(x-7) = \pm x$

$\therefore\ x = \frac{14}{3}$ 또는 $x = 14$

그런데 마을 X는 마을 A와 B사이에 있으므로

$x = \frac{14}{3}$이다.

따라서 X와 B사이의 거리는

$5 - \frac{14}{3} = \frac{1}{3}$(km)이다.

16. 점 $\mathrm{A}(3,\ -1)$과 직선 $x+y-3=0$ 위의 점 P를 연결하는 선분의 중점의 자취의 방정식은?

① $x+2y-5=0$　　② $2x-2y+5=0$

③ $2x-y-5=0$　　④ $x+y-5=0$

⑤ $2x+2y-5=0$

해설

$x+y-3=0$ 위의 임의의 한 점을 $\mathrm{P}(a,\ -a+3)$ 이라 하고 $\overline{\mathrm{AP}}$ 의 중점의 좌표를 $\mathrm{Q}(x,\ y)$라 하면

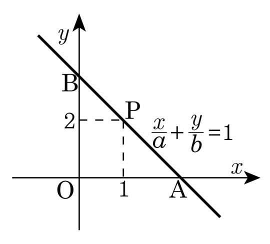
$x=\dfrac{a+3}{2},\quad y=\dfrac{-a+2}{2}$

$\therefore\ a=2x-3,\quad a=-2y+2$

$\therefore\ 2x-3=-2y+2$

$\therefore\ 2x+2y-5=0$

17. 좌표평면 위의 점 $\mathrm{P}(1,2)$ 를 지나는 직선 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1(a>0, b>0)$ 이 x 축, y 축과 만나는 점을 각각 A, B 라 할 때, $\triangle\mathrm{OAB}$ 의 넓이의 최솟값은?



① 4　　② 5　　③ 6　　④ 7　　⑤ 8

해설

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 의 점 $(1,2)$ 를 지나므로

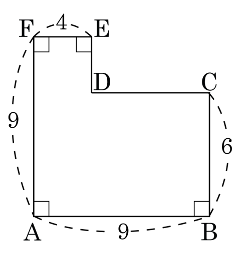
$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=1$ 산술기하조건을 사용하면

$\frac{1}{a}+\frac{2}{b} \geq 2\sqrt{\frac{1}{a}\times\frac{2}{b}}$

$\Rightarrow \quad ab \geq 8$

$\triangle\mathrm{OAB}$ 의 넓이는 $\frac{1}{2}ab$ 이므로 넓이의 최솟값 : 4

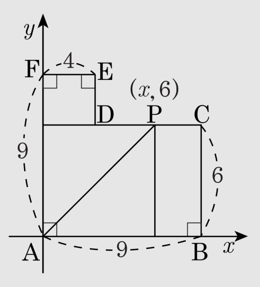
18. 아래 그림과 같은 도형 ABCDEF가 있다. 변 CD 위에 한 점 P를 잡아 선분 AP를 그었더니 선분 AP에 의해 도형의 넓이가 이등분되었다. 이 때, 선분 AP의 길이를 구하면?



① $\sqrt{83}$ ② $\sqrt{84}$ ③ $\sqrt{85}$ ④ $\sqrt{86}$ ⑤ $\sqrt{87}$

해설

그림과 같이 좌표평면 위에서 변 AB가 x축, 점 A가 원점이 되도록 하고, P$(x,\ 6)$이라고 하면 $\overline{\mathrm{PC}} = 9 - x$이다.
이 때, 도형 ABCDEF의 넓이는 66이므로 사다리꼴 ABCP의 넓이는 33이다.



$\frac{1}{2} \times 6 \times \{9 + (9 - x)\} = 33$에서 $x = 7$이다.

$\therefore\ \overline{\mathrm{AP}} = \sqrt{(7-0)^2 + (6-0)^2} = \sqrt{85}$

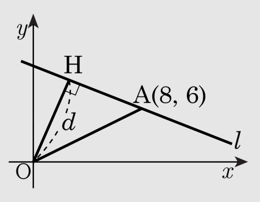
19. 좌표평면 위에서 점 $A(8,\ 6)$ 을 지나는 임의의 직선과 원점사이의 거리의 최댓값은?

① 6　　② 8　　③ 10　　④ 12　　⑤ 14

해설

점 $A(8,\ 6)$ 을 지나는 직선을 l , 원점 O 에서 직선 l 에 내린 수선의 발을 H 라 하면 직각삼각형 OAH 에서 $\overline{OH} \le \overline{OA}$ 이므로, 원점 O 에서 직선 l 까지의 거리 d 는 $d \le \overline{OA} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$

$\therefore\ d \le 10$



따라서 d 의 최댓값은 10 이다.

20. 네 점 $O(0,\ 0)$, $A(4,\ 0)$, $B(4,\ 3)$, $C(0,\ 3)$과 임의의 점 P에 대하여 $\overline{PO}+\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}$의 최솟값은?

① 5 ② $5\sqrt{2}$ ③ 10 ④ $5\sqrt{5}$ ⑤ $10\sqrt{2}$

해설

□OABC를 그려보면 직사각형이 된다.
이 때, $\overline{PO}+\overline{PB}$의 값은 점 P가 $\overline{OB}$ 위에 있을 때 최소이므로
$\overline{PO}+\overline{PB} \geq \overline{OB} \cdots\cdots$ ㉠
또, $\overline{PA}+\overline{PC}$의 값은 점 P가 $\overline{AC}$ 위에 있을 때 최소이므로
$\overline{PA}+\overline{PC} \geq \overline{AC} \cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡에의해 $\overline{PO}+\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}$의 값은 점 P가 $\overline{OB}$와 $\overline{AC}$의 교점일 때 최소이므로
$\overline{PO}+\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC} \geq \overline{OB}+\overline{AC}$
이 때, □OABC의 대각선 OB, AC의 길이는 $\overline{OB} = \overline{AC} = \sqrt{4^2+3^2} = 5$
따라서 $\overline{PO}+\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}$ 의 최솟값은 10이다.

해설

네 점으로부터의 거리의 합이 최소값은 네 점으로 이루어진 사각형의 두 대각선의 길이의 합과 같다