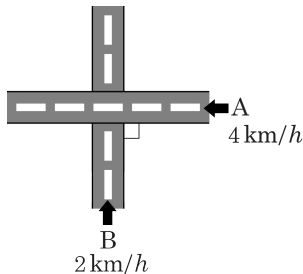


1. 그림과 같이 수직으로 만나는 도로가 있다. 교차점에서 A는 동쪽으로 6km, B는 남쪽으로 4km 지점에 있다. 지금 A는 시속 4km의 속도로 서쪽으로, B는 시속 2km의 속도로 북쪽을 향하여 동시에 출발했을 때 A, B 사이의 거리가 가장 짧을 때는 출발 후 몇 시간 후인가?



- ① 1 시간 후 ② 1.2 시간 후 ③ 1.4 시간 후
 ④ 1.6 시간 후 ⑤ 2 시간 후

해설

동서를 x 축, 남북을 y 축으로 잡으면
 최초의 A, B 의 위치는 A(6, 0), B(0, -4) 이고
 t 시간 후의 A, B 의 좌표는

A(6 - 4t, 0), B(0, -4 + 2t) 이다.

따라서 t 시간 후의 $\overline{AB}$ 의 거리는 s 는

$$s = \sqrt{(6 - 4t)^2 + (-4 + 2t)^2}$$

$$= \sqrt{20t^2 - 64t + 52}$$

$$= \sqrt{20 \left(t^2 - \frac{64}{20}t \right) + 52}$$

$$= \sqrt{20 \left(t - \frac{8}{5} \right)^2 + \frac{4}{5}} \text{ 이므로}$$

$t = \frac{8}{5}$ 일 때 최소가 된다.

$\therefore$ 출발 후 1.6 시간 후이다.

2. 점 $(1, -1)$ 에서 직선 $ax + by = 0 (a \neq 0, b \neq 0)$ 까지의 거리가 $\sqrt{2}$ 일 때, 상수 a, b 의 관계를 바르게 설명한 것은?

① $a - b = 0$

② $a - b = \sqrt{2}$

③ $a + b = 0$

④ $ab = 0$

⑤ $ab = \sqrt{2}$

해설

$$\frac{|a \times 1 + b \times (-1)|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|a - b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sqrt{2}$$

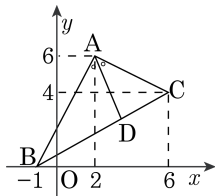
$$|a - b| = \sqrt{2} \sqrt{a^2 + b^2}$$

양변을 제곱하면 $a^2 - 2ab + b^2 = 2a^2 + 2b^2$

$$a^2 + 2ab + b^2 = 0, (a + b)^2 = 0$$

따라서 $a + b = 0$

3. 다음 그림과 같이 세 점 $A(2, 6)$, $B(-1, 0)$, $C(6, 4)$ 를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC 에서 $\angle A$ 의 이등분선이 변 BC 와 만나는 점을 D 라고 할 때, 점 D 의 좌표는?



- ① $\left(2, \frac{6}{5}\right)$ ② $\left(\frac{12}{5}, \frac{8}{5}\right)$ ③ $\left(\frac{14}{5}, 2\right)$
 ④ $\left(\frac{16}{5}, \frac{12}{5}\right)$ ⑤ $\left(\frac{18}{5}, \frac{14}{5}\right)$

해설

점 D 는 $\angle A$ 의 이등분선과 변 BC 의 교점이므로
 $\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{DC}$ 이다.

$$\overline{AB} = \sqrt{(-3)^2 + (-6)^2} = 3\sqrt{5},$$

$$\overline{AC} = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{5} \text{ 이므로}$$

$$\overline{BD} : \overline{DC} = 3 : 2$$

따라서 점 D 는 선분 BC 를 $3 : 2$ 로 내분하는 점이므로

$$\text{점 } D \text{ 의 좌표는 } \left(\frac{18-2}{3+2}, \frac{12+0}{3+2}\right)$$

$$\therefore \left(\frac{16}{5}, \frac{12}{5}\right)$$

4. 길이 3인 선분 AB의 양 끝점 A, B가 각각 x 축, y 축 위에 움직일 때, 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점 P의 자취를 구하면?

① $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$

② $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$

③ $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$

④ $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$

⑤ $x^2 + 3y^2 = 6$

해설

A(a , 0), B(0, b), P(x , y)라 하면

$$\overline{AB} = 3 \text{ 이므로 } \sqrt{a^2 + b^2} = 3$$

$$a^2 + b^2 = 9 \cdots \textcircled{㉠}$$

P(x , y)는 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점이므로 $x = \frac{a}{3}, y = \frac{2b}{3}$

$$\therefore a = 3x, b = \frac{3y}{2} \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉡} \text{를 } \textcircled{㉠} \text{에 대입하면 } 9x^2 + \frac{9}{4}y^2 = 9$$

$$\therefore x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$$

5. 좌표평면 위의 점 $P(3, 5)$ 를 지나고 기울기가 정수인 직선 중 x 절편과 y 절편이 모두 정수인 직선의 개수는?

① 1 개

② 2 개

③ 3 개

④ 4 개

⑤ 5 개

해설

점 $P(3, 5)$ 를 지나고 기울기가 m (m 은 정수)인 직선의 방정식은

$$y - 5 = m(x - 3) \cdots \textcircled{1}$$

①의 x 절편은 $-5 = m(x - 3)$

$$\therefore x = 3 - \frac{5}{m}$$

①의 y 절편은 $y - 5 = -3m \therefore y = 5 - 3m$

이 때, 정수 m 에 대하여 x 절편과 y 절편이 모두 정수가 되기 위해서는 m 의 값이 5 의 약수 (음수 포함) 이어야 한다.

$$\therefore m = 1, 5, -1, -5$$

따라서, x 절편과 y 절편이 모두 정수인 직선은 4 개이다

6. $y = |x - 2| + 1$, $y = mx$ 에 대해 두 식을 동시에 만족하는 (x, y) 가 존재하지 않을 때, m 의 값의 범위는?

① $-1 < m < \frac{1}{2}$

② $-1 \leq m < \frac{1}{2}$

③ $-\frac{1}{2} < m < 1$

④ $-\frac{1}{2} \leq m < 1$

⑤ $-\frac{1}{2} \leq m < 0$

해설

$A : y = |x - 2| + 1$

$B : y = mx$ 라고 하면

$A : x \geq 2 \rightarrow y = x - 1$

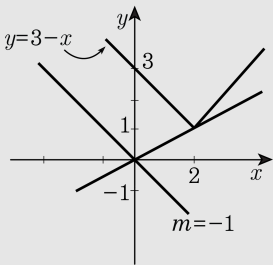
$x < 2 \rightarrow y = 3 - x$

$B : y = mx$ 가 점 $(2, 1)$ 을 지날 때
보다

아래에 있으므로 $1 > 2m \rightarrow m < \frac{1}{2}$

$y = mx$ 의 기울기 $m \geq -1$ 이어야 하므로

$\therefore -1 \leq m < \frac{1}{2}$



7. 직선 $y = x$ 위의 점 P가 두 점 A(2,4), B(0,2)로부터 같은 거리에 있을 때, 사각형 ABOP의 넓이는? (단, O는 원점)

① 2

② 4

③ 6

④ 8

⑤ 10

해설

점 P의 좌표를 (a, a) 으로 놓으면
 $\overline{AP} = \overline{BP}$ 에서 $\sqrt{(a-2)^2 + (a-4)^2} = \sqrt{a^2 + (a-2)^2}$

양변 제곱하여 정리하면

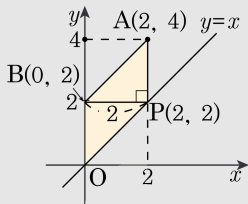
$$2a^2 - 12a + 20 = 2a^2 - 4a + 4, 8a = 16$$

$$\therefore a = 2$$

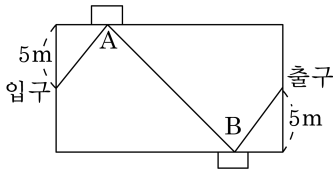
따라서 점 P의 좌표는 (2, 2)이므로 다음 그림에서
 (□ABOP의 넓이)

$$= (\triangle OBP \text{의 넓이}) + (\triangle ABP \text{의 넓이})$$

$$= \frac{1}{2} \times 2 \times 2 + \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 4$$



8. 다음 그림과 같은 전시장에서 관광객이 전시물을 보기 위한 이동 거리를 최소로 하려한다. 전시물 A, B가 있을 때, 전시물 A의 위치는 왼쪽에서 몇 m 떨어져 있어야 하는지 구하여라.(단, 이 전시장은 가로 20m, 세로 10m인 직사각형 모양이다.)

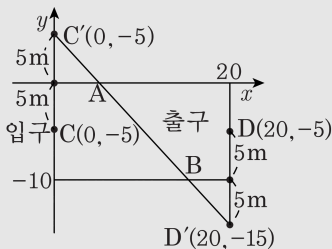


▶ 답 : 5m

▶ 정답 : 5m

해설

전시장의 입구를 점 $C(0, -5)$, 출구를 점 $D(20, -5)$ 라 하자.
 점 $C(0, -5)$ 를 x 축에 대하여 대칭이동한 점은 $C'(0, 5)$
 점 $D(20, -5)$ 를 직선 $y = -10$ 에 대해 대칭이동한 점은 $D'(20, -15)$ 이다.



이 때, 직선 $C'D'$ 의 방정식은 $y = -x + 5$ 이다.

점 A의 좌표는 직선 $C'D'$ 이 x 축과 만나는 점이므로 $(5, 0)$ 이다.
 따라서, 왼쪽에서 5m 떨어진 곳에 전시물 A가 위치해야 한다.

9. 평면 위에서 질량이 같은 질점들을 한 점을 중심으로 가장 쉽게 회전시키려면 각 점으로부터 회전중심까지의 거리의 제곱의 합이 가장 작아야 한다. 평면 위의 점 $O(0, 0)$, $A(2, 0)$, $B(2, 1)$ 에 각각 질량이 같은 질점이 놓여 있을 때 이들 세 질점을 가장 쉽게 회전시키는 회전중심 P 의 좌표는?

① $P(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$

② $P(\frac{4}{3}, \frac{1}{3})$

③ $P(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$

④ $P(1, \frac{1}{2})$

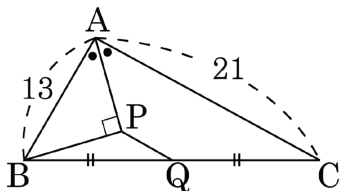
⑤ $P(2, \frac{1}{2})$

해설

$$\begin{aligned}
 P(x, y) \text{ 라고 하면 } \overline{OP}^2 + \overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 &= x^2 + y^2 + (x-2)^2 + y^2 + \\
 (x-2)^2 + (y-1)^2 &= 3x^2 - 8x + 3y^2 - 2y + 9 = 3\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 + \\
 3\left(y - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{10}{3}
 \end{aligned}$$

이 값을 최소가 되게 하는 점 $P(\frac{4}{3}, \frac{1}{3})$ 는 $\triangle ABC$ 의 무게중심이
다.

10. 다음 그림과 같이 $\triangle ABC$ 에서 선분 AP 는 $\angle BAC$ 의 이등분선, $\overline{AP} \perp \overline{BP}$ 이고 점 Q 는 변 BC 의 중점이다. $\overline{AB} = 13$, $\overline{AC} = 21$ 일 때, $\overline{PQ}$ 의 길이는?



① 4

② 5

③ 6

④ 7

⑤ 8

해설

$\overline{BP}$ 의 연장선이 $\overline{AC}$ 와 만나는 점을 M 이라 하자.

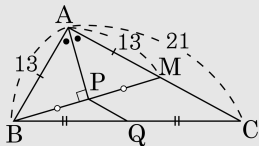
$\angle BAP = \angle MAP$, $\overline{AP}$ 는 공통,

$\angle APB = \angle R$ 이므로 $\triangle ABP \cong \triangle AMP$

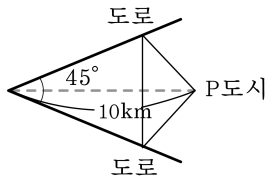
$\overline{AB} = \overline{AM} = 13$ 이다.

따라서 $\overline{MC} = 8$

$\triangle BCM$ 에서 $\overline{PQ} : \overline{MC} = 1 : 2$ 이므로 $\overline{PQ} = 4$



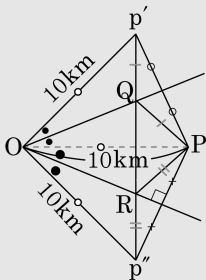
11. 다음 그림과 같이 두 개의 도로가 45° 의 각도로 교차하고 있다. 교차점에서 10 km 떨어진 도시 P와 두 도로 사이를 연결하는 삼각형 모양의 새로운 도로를 건설할 때, 건설해야 할 도로의 최소 길이는?



- ① $10\sqrt{2}$ km ② $12\sqrt{2}$ km ③ $14\sqrt{2}$ km
 ④ $16\sqrt{2}$ km ⑤ $18\sqrt{2}$ km

해설

점 P의 두 도로에 대한 대칭점을 각각 P' , P'' 이라 하면 $\overline{PQ} + \overline{QR} + \overline{RP} = \overline{P'Q} + \overline{QR} + \overline{RP''}$ 이고 $\overline{P'P''}$ 가 최단거리가 된다. $\triangle P'OP''$ 가 직각이등변 삼각형이므로 피타고라스의 정리에 의하여 $\overline{P'P''}^2 = 10^2 + 10^2 = 200 \quad \therefore \overline{P'P''} = 10\sqrt{2}$



12. 네 점 $A(a, 2)$, $B(3, 1)$, $C(2, -3)$, $D(b, -2)$ 를 꼭짓점으로 하는 $\square ABCD$ 가 마름모가 되게 하는 실수 a, b 에 대하여 $a + b$ 의 값은?
(단, $a > 0$)

① 11

② 12

③ 13

④ 14

⑤ 15

해설

마름모는 평행사변형이므로

$\overline{AC}$ 의 중점과 $\overline{BD}$ 의 중점이 일치한다.

$$\text{즉, } \left(\frac{a+2}{2}, \frac{2+(-3)}{2} \right) = \left(\frac{3+b}{2}, \frac{1+(-2)}{2} \right) \text{에서 } \frac{a+2}{2} = \frac{b+3}{2}$$

$$\therefore a - b = 1 \cdots \textcircled{1}$$

이 때, 평행사변형이 마름모가 되려면 이웃하는 두 변의 길이가 같아야 한다. 즉, $\overline{AB} = \overline{BC}$ 이어야 하므로

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 \text{에서}$$

$$(3-a)^2 + (1-2)^2 = (2-3)^2 + (-3-1)^2$$

$$a^2 - 6a + 10 = 17, a^2 - 6a - 7 = 0$$

$$(a-7)(a+1) = 0$$

$$\therefore a = 7 (\because a > 0)$$

이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $b = 6$

$$\therefore a + b = 13$$

13. 삼각형 ABC에서 꼭지점 A의 좌표가 (5, 4), 변 AB의 중점 M의 좌표가 (-1, 3), 무게중심의 좌표가 (1, 2) 일 때 변 BC를 2 : 1로 내분하는 점의 좌표는 (a, b)라 한다. 이 때, $a + b$ 의 값은?

① $\frac{1}{3}$

② $\frac{2}{3}$

③ 1

④ $\frac{4}{3}$

⑤ $\frac{5}{3}$

해설

B의 좌표를 (b_1, b_2) , C의 좌표를 (c_1, c_2) 라고 하면

$\overline{AB}$ 의 중점의 좌표가

$$\left(\frac{b_1 + 5}{2}, \frac{b_2 + 4}{2} \right) \text{ 이므로}$$

$$\frac{b_1 + 5}{2} = -1, \frac{b_2 + 4}{2} = 3 \text{ 이다.}$$

$$\text{따라서 } b_1 = -7, b_2 = 2$$

$$\text{즉 } B(-7, 2)$$

$\overline{CM}$ 을 2 : 1로 내분하는 점이

$\triangle ABC$ 의 무게중심이므로

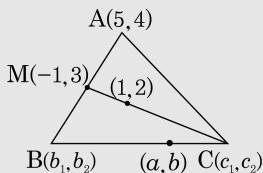
$$\left(\frac{2 \times (-1) + 1 \times c_1}{2 + 1}, \frac{2 \times 3 + 1 \times c_2}{2 + 1} \right) = (1, 2)$$

$$\left(\frac{c_1 - 2}{3}, \frac{6 + c_2}{3} \right) = (1, 2) \text{ 에서 } c_1 = 5, c_2 = 0$$

$\overline{BC}$ 의 2 : 1로 내분점을 계산하면,

$$\left(\frac{2 \times 5 + 1 \times (-7)}{2 + 1}, \frac{2 \times 0 + 1 \times 2}{2 + 1} \right) = \left(1, \frac{2}{3} \right)$$

$$\text{따라서 } a + b = \frac{5}{3} \text{ 가 된다.}$$



14. 좌표평면 위의 세 점 A(3, 4), B(0, 0), C(8, -8)에 대하여 $\angle BAC$ 의 이등분선이 선분 BC와 만나는 교점의 좌표는?

① $\left(\frac{1}{8}, -\frac{1}{8}\right)$

② $\left(\frac{20}{9}, -\frac{20}{9}\right)$

③ $\left(\frac{15}{11}, -\frac{15}{11}\right)$

④ $\left(\frac{25}{13}, -\frac{25}{13}\right)$

⑤ $\left(\frac{28}{17}, -\frac{28}{17}\right)$

해설

$$\overline{AB} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(8-3)^2 + (-8-4)^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$$

$\angle BAC$ 의 이등분선이 선분 BC와 만나는 교점을 D(x, y) 라 하면 각의 이등분선의 성질에 의하여

$$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{DC} = 5 : 13$$

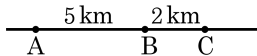
따라서, 점 D(x, y)는 선분 BC를 5 : 13으로 내분하는 점이므로

$$x = \frac{5 \cdot 8 + 13 \cdot 0}{5 + 13} = \frac{20}{9},$$

$$y = \frac{5 \cdot (-8) + 13 \cdot 0}{5 + 13} = -\frac{40}{18} = -\frac{20}{9}$$

$$\therefore D\left(\frac{20}{9}, -\frac{20}{9}\right)$$

15. 직선 도로가 통과하는 세 마을 A, B, C가 있다. 마을 A와 마을 B사이의 거리는 5km, 마을 B와 마을 C사이의 거리는 2km이다. 이 도로 위에 마을 X가 있는데, 마을 X와 마을 A사이의 거리는 마을 X와 마을 C사이의 거리의 2배이다. 마을 X와 마을 B사이의 거리는? (단, 마을 X는 마을 A와 B사이에 있다.)

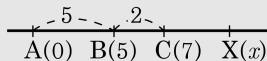


- ① $\frac{1}{5}$ km ② $\frac{1}{4}$ km ③ $\frac{1}{3}$ km ④ $\frac{1}{2}$ km ⑤ 1 km

해설

다음 그림과 같이 직선도로를 수직선,

마을 A를 원점으로 하면



A(0), B(5), C(7)이다. 이 때 X(x)

A와 X사이의 거리는 C와 X사이의 거리의 2배이므로

$$|x - 0| = 2|x - 7|, |x| = 2|x - 7|$$

$$\therefore 2(x - 7) = \pm x$$

$$\therefore x = \frac{14}{3} \text{ 또는 } x = 14$$

그런데 마을 X는 마을 A와 B사이에 있으므로

$$x = \frac{14}{3} \text{ 이다.}$$

따라서 X와 B사이의 거리는

$$5 - \frac{14}{3} = \frac{1}{3} (\text{km}) \text{ 이다.}$$

16. 점 A(3, -1) 과 직선 $x + y - 3 = 0$ 위의 점 P를 연결하는 선분의 중점의 자취의 방정식은?

① $x + 2y - 5 = 0$

② $2x - 2y + 5 = 0$

③ $2x - y - 5 = 0$

④ $x + y - 5 = 0$

⑤ $2x + 2y - 5 = 0$

해설

$x + y - 3 = 0$ 위의 임의의 한 점을 P(a , $-a + 3$) 이라 하고 $\overline{AP}$ 의 중점의 좌표를 Q (x , y)라 하면

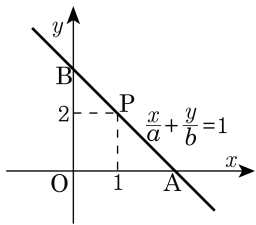
$$x = \frac{a + 3}{2}, \quad y = \frac{-a + 2}{2}$$

$$\therefore a = 2x - 3, \quad a = -2y + 2$$

$$\therefore 2x - 3 = -2y + 2$$

$$\therefore 2x + 2y - 5 = 0$$

17. 좌표평면 위의 점 $P(1, 2)$ 를 지나는 직선 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 (a > 0, b > 0)$ 이 x 축, y 축과 만나는 점을 각각 A, B 라 할 때, $\triangle OAB$ 의 넓이의 최솟값은?



① 4

② 5

③ 6

④ 7

⑤ 8

해설

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ 의 점 $(1, 2)$ 를 지나므로

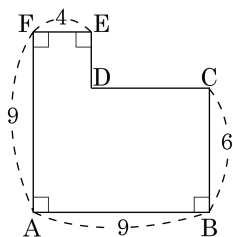
$\frac{1}{a} + \frac{2}{b} = 1$ 산술기하조건을 사용하면

$$\frac{1}{a} + \frac{2}{b} \geq 2 \sqrt{\frac{1}{a} \times \frac{2}{b}}$$

$$\Rightarrow ab \geq 8$$

$\triangle OAB$ 의 넓이는 $\frac{1}{2}ab$ 이므로 넓이의 최솟값 : 4

18. 아래 그림과 같은 도형 ABCDEF가 있다. 변 CD 위에 한 점 P를 잡아 선분 AP를 그었더니 선분 AP에 의해 도형의 넓이가 이등분되었다. 이 때, 선분 AP의 길이를 구하면?



① $\sqrt{83}$

② $\sqrt{84}$

③ $\sqrt{85}$

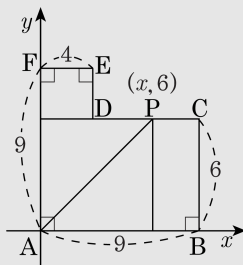
④ $\sqrt{86}$

⑤ $\sqrt{87}$

해설

그림과 같이 좌표평면 위에서 변 AB가 x 축, 점 A가 원점이 되도록 하고, $P(x, 6)$ 이라고 하면 $\overline{PC} = 9 - x$ 이다.

이 때, 도형 ABCDEF의 넓이는 66이므로 사다리꼴 ABCP의 넓이는 33이다.



$$\frac{1}{2} \times 6 \times \{9 + (9 - x)\} = 33 \text{ 에서 } x = 7 \text{ 이다.}$$

$$\therefore \overline{AP} = \sqrt{(7 - 0)^2 + (6 - 0)^2} = \sqrt{85}$$

19. 좌표평면 위에서 점 $A(8, 6)$ 을 지나는 임의의 직선과 원점사이의 거리의 최댓값은?

① 6

② 8

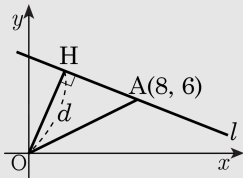
③ 10

④ 12

⑤ 14

해설

점 $A(8, 6)$ 을 지나는 직선을 l , 원점 O 에서 직선 l 에 내린 수선의 발을 H 라 하면 직각삼각형 OAH 에서 $\overline{OH} \leq \overline{OA}$ 이므로, 원점 O 에서 직선 l 까지의 거리 d 는 $d \leq \overline{OA} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$
 $\therefore d \leq 10$



따라서 d 의 최댓값은 10 이다.

20. 네 점 $O(0, 0)$, $A(4, 0)$, $B(4, 3)$, $C(0, 3)$ 과 임의의 점 P 에 대하여 $\overline{PO} + \overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC}$ 의 최솟값은?

① 5

② $5\sqrt{2}$

③ 10

④ $5\sqrt{5}$

⑤ $10\sqrt{2}$

해설

□OABC를 그려보면 직사각형이 된다.

이 때, $\overline{PO} + \overline{PB}$ 의 값은 점 P 가 $\overline{OB}$ 위에 있을 때 최소이므로
 $\overline{PO} + \overline{PB} \geq \overline{OB} \dots\dots \textcircled{A}$

또, $\overline{PA} + \overline{PC}$ 의 값은 점 P 가 $\overline{AC}$ 위에 있을 때 최소이므로
 $\overline{PA} + \overline{PC} \geq \overline{AC} \dots\dots \textcircled{B}$

①, ②에 의해 $\overline{PO} + \overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC}$ 의 값은 점 P 가 $\overline{OB}$ 와 $\overline{AC}$ 의 교점일 때 최소이므로

$$\overline{PO} + \overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} \geq \overline{OB} + \overline{AC}$$

이 때, □OABC의 대각선 OB, AC의 길이는 $\overline{OB} = \overline{AC} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

따라서 $\overline{PO} + \overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC}$ 의 최솟값은 10이다.

해설

네 점으로부터의 거리의 합이 최소값은 네 점으로 이루어진 사각형의 두 대각선의 길이의 합과 같다