1. 연립부등식 $\begin{cases} 0.3(x-1)+0.2(x+4)<x-3 \\ \frac{5}{6}x-\frac{4}{9}(x+1) \geq \frac{1}{2}x-3 \end{cases}$ 를 만족하는 정수의 개수를 구하면?

① 15 개 ② 16 개 ③ 17 개 ④ 18 개 ⑤ 19 개

해설

i) $0.3(x-1)+0.2(x+4)<x-3$
양변에 10 을 곱한 후 괄호를 풀면,
$3x-3+2x+8<10x-30$
$5x>35$
$x>7$
ii) $\frac{5}{6}x-\frac{4}{9}(x+1) \geq \frac{1}{2}x-3$
양변에 분모의 최소공배수인 18을 곱한 후 괄호를 풀면,
$15x-8(x+1) \geq 9x-54$
$15x-8x-8 \geq 9x-54$
$2x \leq 46$
$x \leq 23$
따라서 $7<x \leq 23$ 를 만족하는 정수는 8, 9, 10, $\cdots$, 23 의 16 개이다.

2. x 가 양이 아닌 정수일 때, $0.2x - 3 < \frac{1}{2}x - \frac{3}{10} \leq 3 - 0.6x$ 의 해의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 9 개

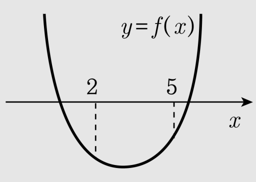
해설

i) $0.2x - 3 < \frac{1}{2}x - \frac{3}{10}$ 의 양변에 10을 곱하면
$2x - 30 < 5x - 3$
$-3x < 27$
$x > -9$
ii) $\frac{1}{2}x - \frac{3}{10} \leq 3 - 0.6x$ 의 양변에 10을 곱하면
$5x - 3 \leq 30 - 6x$
$11x \leq 33$
$x \leq 3$
부등식의 해는 $-9 < x \leq 3$, x 가 양이 아닌 정수이므로 $-8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0$ 의 9 개이다.

3. 이차방정식 $x^2 - 7x + 10 = 0$ 의 두 근이 이차방정식 $x^2 - 6x + k = 0$ 의 두 근 사이에 있기 위한 정수 k 의 최댓값은?

① 4　　② 5　　③ 6　　④ 7　　⑤ 8

해설



이차방정식 $x^2 - 7x + 10 = 0$ 에서
$(x-2)(x-5) = 0$ $\therefore$ $x = 2$ 또는 $x = 5$
$f(x) = x^2 - 6x + k$ 로 놓으면 함수 $y = f(x)$ 의
그래프는 다음 그림과 같아야 한다.
따라서 $f(2) < 0$, $f(5) < 0$ 이므로
$f(2) = -8 + k < 0$ 에서 $k < 8$
$f(5) = -5 + k < 0$ 에서 $k < 5$
$\therefore$ $k < 5$ $\therefore$ 정수 k 의 최댓값은 4 이다.

4. 좌표평면 위의 두 점 $A(7, 4)$, $B(8, 6)$과 직선 $y = x$ 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\overline{PA} + \overline{PB}$의 값을 최소가 되게 하는 점 P의 x좌표를 a라 할 때, $5a$의 값을 구하면?

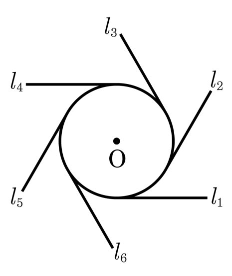
▶ 답 :

▷ 정답 : 32

해설

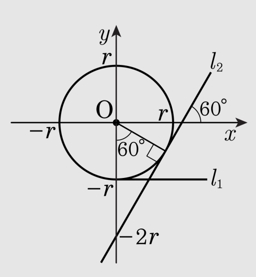
$A(7,\ 4)$를 $y = x$에 대칭이동한 점 $C(4,\ 7)$에 대하여 $\overline{PA} + \overline{PB}$가 최소인 점 P는
선분 BC와 직선 $y = x$의 교점이다.
$y = -\frac{1}{4}x + 8$와 $y = x$의 교점은 $\left(\frac{32}{5}, \frac{32}{5}\right)$
$\therefore\ 5a = 32$

5. 형중이는 수차 제작을 위해 그림과 같은 설계도를 그리고 있다. $l_1,\ l_2,\ \cdots,\ l_6$ 는 원주를 6 등분하는 점에서 원의 접선 방향으로 붙인 날개의 단면이다. 두 접선 l_1 과 l_2 의 연장선의 교점으로부터 원의 중심까지의 거리는 반지름의 몇 배인가?



① 2 배 ② $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 배 ③ $3\sqrt{5}$ 배
④ $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ 배 ⑤ 5 배

해설



그림에서 $l_1 : y = -r$라 놓으면
$l_2 :\ y = \sqrt{3}x + k = \sqrt{3}x - 2r$

l_2 의 x 절편은 $\dfrac{2r}{\sqrt{3}}$ 이고

원의 반지름이 $\cos 30° = \dfrac{r}{x}$ 이므로

$x = r \times \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

따라서, 구하는 l_1 과 l_2 의 연장선의 교점으로부터

원의 중심까지의 거리는 반지름의 $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ 배이다.

6. 삼차방정식 $x^3 - 1 = 0$의 한 허근을 ω라 할 때, 자연수 n에 대하여 $f(n)$을 $f(n) = \dfrac{\omega^{2n}}{1+\omega^n}$으로 정의하자. 이 때, $f(1)+f(2)+\cdots+f(8)$의 값은?

① -6 ② -5 ③ $-\dfrac{9}{2}$ ④ $-\dfrac{3}{2}$ ⑤ 0

해설

$x^3 - 1 = 0 \Rightarrow$
$(x-1)(x^2+x+1) = 0$
$\Rightarrow \omega^3 = 1,\ \omega^2+\omega+1 = 0$
$n = 3\alpha,\ 3\alpha+1,\ 3\alpha+2$라 하자

i) $n = 3\alpha$

$$f(n) = \frac{\omega^{2n}}{1+\omega^n}$$
$$= \frac{(\omega^3)^{2\alpha}}{1+(\omega^3)^\alpha} = \frac{1}{2}$$

ii) $n = 3\alpha+1$

$$f(n) = \frac{(\omega^3)^{2\alpha}\times\omega^2}{1+(\omega^3)^\alpha\times\omega}$$
$$= \frac{\omega^2}{\omega+1}$$
$$= \frac{\omega^2}{-\omega^2} = -1$$

iii) $n = 3\alpha+2$

$$f(n) = \frac{(\omega^3)^{2\alpha}\times\omega^4}{1+\omega^{3\alpha}\times\omega^2}$$
$$= \frac{\omega^4}{1+\omega^2} = \frac{\omega}{-\omega} = -1$$

$\therefore\ f(1)+f(2)+\cdots+f(8)$
$= (-1+-1+\frac{1}{2})+(-1+-1+\frac{1}{2})+(-1+-1)$
$= -5$

7. 어떤 삼각형의 세 변의 길이가 긴 변부터 차례로 $4x+5$, $x+12$, $2x-3$ 이고, 세 변의 길이가 모두 자연수일 때, x 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: 2

▷ 정답: 3

해설

삼각형의 세 변의 길이 관계는
(가장 긴 변의 길이) < (다른 두 변의 길이의 합) 이어야 하므로
$4x+5<(2x-3)+(x+12)$
$\therefore\ x<4\cdots$ ㉠
또 변의 길이는 양수이어야 하므로
$2x-3>0$
$\therefore\ x>\frac{3}{2}\cdots$ ㉡
㉠, ㉡ 의 공통범위를 구하면
$\frac{3}{2}<x<4$
세 변의 길이가 모두 자연수이기 위해서 x 는 정수이어야 하므로
$\therefore\ x=2,\ 3$

8. 점 $\mathrm{P}(3, 2)$를 지나며 기울기가 음수인 임의의 직선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 할 때, $\overline{\mathrm{OA}} + \overline{\mathrm{OB}}$의 최솟값을 구하면?(단, O 는 원점)

① $6 + 2\sqrt{6}$　　② $5 + 2\sqrt{6}$　　③ $4 + 2\sqrt{6}$

④ $3 + 2\sqrt{6}$　　⑤ $2 + 2\sqrt{6}$

해설

$a > 0$ 일때 음의 직선이므로, $y = -ax + b$

$(3,\ 2)$ 를 지나므로 $2 = -3a + b,\quad b = 3a + 2$

x 축과의 교점 :

$0 = -a \cdot x + b,\quad ax = b,\quad x = \frac{b}{a} = \frac{3a+2}{a} = 3 + \frac{2}{a}$

$\therefore\ \mathrm{A}\left(3 + \frac{2}{\mathrm{a}},\ 0\right)$

y 축과의 교점: $y = b = 3a + 2$

$\therefore\ \mathrm{B}(0,\ 3a+2)$

$\therefore\ \overline{\mathrm{OA}} + \overline{\mathrm{OB}} = 3 + \frac{2}{a} + 3a + 2 \geq 5 + 2 \cdot \sqrt{6}$

($\because\ a > 0$이기에 산술기하 성립)

따라서 구하는 최솟값은 $\therefore 5 + 2\sqrt{6}$

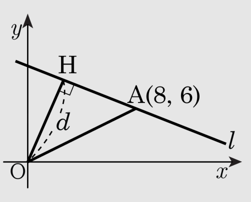
9. 좌표평면 위에서 점 $A(8,\ 6)$ 을 지나는 임의의 직선과 원점사이의 거리의 최댓값은?

① 6 　　② 8 　　③ 10 　　④ 12 　　⑤ 14

해설

점 $A(8,\ 6)$ 을 지나는 직선을 l , 원점 O 에서 직선 l 에 내린 수선의 발을 H 라 하면 직각삼각형 OAH 에서 $\overline{OH} \leq \overline{OA}$ 이므로, 원점 O 에서 직선 l 까지의 거리 d 는 $d \leq \overline{OA} = \sqrt{8^2+6^2} = 10$

$\therefore\ d \leq 10$



따라서 d 의 최댓값은 10 이다.

10. 방정식 $x^5 = 1$의 허근을 ω라 하자. $\alpha = \omega + \frac{1}{\omega}$일 때 $\alpha^2 + \alpha$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^5 = 1, (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = 0$

$\therefore\ \omega^4 + \omega^3 + \omega^2 + \omega + 1 = 0$

ω^2 으로 이 식을 나누면

$$\omega^2 + \omega + 1 + \frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega}^2 = 0$$

$$\left(\omega^2 + \frac{1}{\omega}^2\right) + \left(\omega + \frac{1}{\omega}\right) + 1 = 0,$$

$$\left(\omega + \frac{1}{\omega}\right)^2 - 2 + \left(\omega + \frac{1}{\omega}\right) + 1 = 0$$

$\therefore \alpha^2 + \alpha - 1 = 0,\ \alpha^2 + \alpha = 1$

11. $x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 2x + 1 = 0$일 때, $x + \frac{1}{x}$의 값은?(단, x는 실수)

① $-1 + \sqrt{6}$　② $-1 - \sqrt{6}$　③ $\frac{-3 + \sqrt{5}}{2}$
④ $\frac{-3 - \sqrt{5}}{2}$　⑤ 1

해설

(i) $x \neq 0$이므로
$x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 2x + 1 = 0$의 양변을
x^2으로 나누면

$x^2 + 2x - 3 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x}^{2} = 0$

$\therefore \left(x^2 + \frac{1}{x}^{2}\right) + 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 3 = 0$

$x + \frac{1}{x} = t$로 놓으면

$(t^2 - 2) + 2t - 3 = 0,\ t^2 + 2t - 5 = 0$

$\therefore\ t = -1 \pm \sqrt{6}$

(ii) $x + \frac{1}{x} = -1 \pm \sqrt{6}$

그런데 $\left|x + \frac{1}{x}\right| \geq 2$이므로

($\because$ x는 실수)

$\therefore\ x + \frac{1}{x} = -1 - \sqrt{6}$

12. 사차방정식 $x^4 + 5x^3 - 4x^2 + 5x + 1 = 0$의 두 실근의 합을 구하면?

① -5 ② -6 ③ 0 ④ 5 ⑤ 6

해설

짝수차 상반방정식이므로
양변을 x^2으로 나누면
$x^2 + 5x - 4 + \frac{5}{x} + \frac{1^{2}}{x} = 0,$
$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 6 = 0$
$x + \frac{1}{x} = t$라 놓으면
$t^2 + 5t - 6 = 0,\ (t+6)(t-1) = 0$
$\therefore\ t = 1,\ -6$
즉, $x + \frac{1}{x} = 1,\ x + \frac{1}{x} = -6$
$\therefore\ x^2 - x + 1 = 0 \cdots\cdots$ ㉠
$x^2 + 6x + 1 = 0 \cdots\cdots$ ㉡
㉠식은 허근을 가지므로 조건에 맞지 않고
㉡식에서 두 실근의 합은
근과 계수와의 관계에서
$\therefore\ \alpha + \beta = -6$

13. 삼차방정식 $x^3 + (1-2a)x^2 + (a^2 - a + 1)x - a = 0$이 단 한 개의 실근을 갖게 하는 실수 a의 값의 범위는? (단, 중근은 한 개의 해로 한다.)

① $-3 \le a < 1$　　② $-3 < a \le 1$　　③ $-1 \le a < 3$

④ $-1 < a \le 3$　　⑤ $-2 \le a < 1$

해설

$f(x) = x^3 + (1-2a)x^2 + (a^2 - a + 1)x - a$라 하면 $f(a) = 0$ 이므로

$f(x) = (x-a)\{x^2 - (a-1)x + 1\}$

i) $x = a$가 삼중근일 때

$a^2 - (a-1)a + 1 = 0$에서 $a = -1$ 여기서, $a = -1$일 때 $x = -1$ (삼중근)

ii) $x^2 - (a-1)x + 1 = 0$이 허근을 가질 때

$\mathrm{D} = (a-1)^2 - 4 < 0$　　$\therefore\ -1 < a < 3$

i), ii)에서 $-1 \le a < 3$

14. 서로 다른 세 실수 a, b, c가 $a^3 - 6a = b^3 - 6b = c^3 - 6c = -1$을 만족시킬 때, $a^3 + b^3 + c^3$의 값은?

① 1　　② -1　　③ 3　　④ -3　　⑤ 6

해설

$a^3 - 6a = -1,\ b^3 - 6b = -1,\ c^3 - 6c = -1$이므로
$a,\ b,\ c$는 삼차방정식 $x^3 - 6x = -1$
즉, $x^3 - 6x + 1 = 0$의 세 근이다.
따라서, 근과 계수와의 관계에서 $a + b + c = 0,\ ab + bc + ca = 6,\ abc = -1$
$\therefore\ a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$
에서 $a + b + c = 0$이므로 $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc = 3 \cdot (-1) = -3$

15. 사차방정식 $x^4-3x-1=0$의 네 근을 x_1, x_2, x_3, x_4라 할 때, $x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4$의 값을 구하면?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$x^4=3x+1$이므로

$x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4$

$=3(x_1+x_2+x_3+x_4)+4$

x^4-3x-1

$=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$

$=x^4-(x_1+x_2+x_3+x_4)x^3+\cdots+x_1x_2x_3x_4$

x^3의 계수를 비교하면

$x_1+x_2+x_3+x_4=0$

$\therefore\ x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4=4$

16. 주말 연속극을 시작하기 전에 상품 광고를 하려고 한다. 광고에는 광고 시간이 20초인 것과 25초인 것 두 종류가 있고, 광고 내용이 바뀔 때마다 1초 동안의 간격을 둔다. 정확하게 4분 30초 동안에 11개의 상품을 광고하고 싶다면 광고 시간이 20초인 상품을 몇 개 광고해야 하는지 구하면?

① 1개　② 3개　③ 5개　④ 7개　⑤ 9개

해설

20초 광고의 개수를 x,
25초 광고의 개수를 y라 할 때
11개의 광고들 사이의 간격은 10×1(초) $= 10$(초)
총 4분 30초는 $60 \times 4 + 30 = 270$(초)이다.
$\therefore$ 광고에 사용되는 시간은 $270 - 10 = 260$(초)

$$\begin{cases} x + y = 11 \\ 20x + 25y = 260 \end{cases}$$

두 식을 연립하여 풀면, $x = 3,\ y = 8$
따라서 20초 광고는 3개이다.

17. 부등식 $1 \le |x-1| < 6$ 을 만족하는 정수 x 중 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$1 \le |x-1| < 6$ 에서

1) $x \ge 1$ 일 때

$1 \le x-1 < 6$, $2 \le x < 7$

$\therefore$ $x = 2, 3, 4, 5, 6$

2) $x < 1$ 일 때

$1 \le -x+1 < 6$, $-5 < x \le 0$

$\therefore$ $x = -4, -3, -2, -1, 0$

1), 2) 에 의해서 부등식을 만족하는 정수 x 의 최댓값은 6, 최솟값은 -4

최댓값과 최솟값의 합은 $6 - 4 = 2$

18. 백의 자리의 숫자의 2 배와 일의 자리의 숫자의 합은 십의 자리의 숫자보다 작고, 각 자리의 숫자가 모두 자연수인 세 자리 자연수 중 가장 큰 수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 392

해설

세 자리 자연수를 $N = 100a + 10b + c$ 라 하면 $a,\ b,\ c$ 는 모두 0 보다 크고 10 보다 작은 자연수이고 $b > 2a + c$ 이다. 따라서 $10 > b > 2a + c$ 에서 $10 > 2a + c$, 이때, $c > 0$ 이므로 $a < 5$

1) $a = 4$ 일 때

$10 > b > 2a + c = 2 \times 4 + c = 8 + c$

$c \geq 1$ 이므로 $10 > b > 8 + c \geq 9$

그런데 $b > 9$ 일 수 없으므로 $a \neq 4$

2) $a = 3$ 일 때

$10 > b > 2a + c = 2 \times 3 + c = 6 + c$

$c \geq 1$ 이므로 $10 > b > 6 + c \geq 7$

$\therefore\ b = 8$ 또는 9

1), 2) 에서 N 은 가장 큰 수이므로 $a = 3,\ b = 9$

$b > 2a + c$ 에서 $9 > 6 + c$, 즉 $c < 3$ 이므로 $c = 2$

따라서 구하는 세 자리의 자연수는 392 이다.

19. 세 자연수의 평균이 5 이하이고, 세 자연수 중 두 개씩을 골라 합을 구했을 때, 그 비가 $6:9:11$ 인 세 자연수 중 가장 큰 수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

세 자연수를 각각 $x,\ y,\ z$ 라 하면 세 자연수 중 두 개씩을 골라 합을 구했을 때, 그 비가 $6:9:11$ 이므로

$x+y=6k$

$y+z=9k$

$z+x=11k$

각 변끼리 더하면 $x+y+z=13k$

따라서 $x=4k,\ y=2k,\ z=7k$

그런데 세 수의 평균이 5 이하이므로

$\frac{x+y+z}{3} \leq 5$ 에서 $13k \leq 15$

$\therefore\ k \leq \frac{15}{13}$

k 는 자연수이므로 $k=1$

따라서 $x=4,\ y=2,\ z=7$ 이고,

이 중 가장 큰 수는 7 이다.

20. $a < b < c$일 때, $|x-a| < |x-b| < |x-c|$의 해를 구하면?

① $x < \frac{a+b}{2}$　　② $x > \frac{a+b}{2}$　　③ $x < \frac{b+c}{2}$

④ $x > \frac{b+c}{2}$　　⑤ $x < \frac{b-c}{2}$

해설

ⅰ) $|x-a| < |x-b|$에서 $(x-a)^2 < (x-b)^2$

$(b-a)(2x-a-b) < 0$, $b-a > 0$이므로

$x < \frac{a+b}{2}$

ⅱ) $|x-b| < |x-c|$에서 $(x-b)^2 < (x-c)^2$

$(c-b)(2x-b-c) < 0$, $c-b > 0$이므로 $x < \frac{b+c}{2}$

ⅰ), ⅱ)에서 $x < \frac{a+b}{2}$ $\left(\because \frac{a+b}{2} < \frac{b+c}{2}\right)$