

1. 연립부등식
$$\begin{cases} 0.3(x-1) + 0.2(x+4) < x-3 \\ \frac{5}{6}x - \frac{4}{9}(x+1) \geq \frac{1}{2}x - 3 \end{cases}$$
 를 만족하는 정수의

개수를 구하면?

① 15 개



② 16 개

③ 17 개

④ 18 개

⑤ 19 개

해설

i) $0.3(x-1) + 0.2(x+4) < x-3$

양변에 10 을 곱한 후 괄호를 풀면,

$$3x - 3 + 2x + 8 < 10x - 30$$

$$5x > 35$$

$$x > 7$$

ii) $\frac{5}{6}x - \frac{4}{9}(x+1) \geq \frac{1}{2}x - 3$

양변에 분모의 최소공배수인 18을 곱한 후 괄호를 풀면,

$$15x - 8(x+1) \geq 9x - 54$$

$$15x - 8x - 8 \geq 9x - 54$$

$$2x \leq 46$$

$$x \leq 23$$

따라서 $7 < x \leq 23$ 를 만족하는 정수는 8, 9, 10, $\dots$, 23 의 16 개이다.

2. x 가 양이 아닌 정수일 때, $0.2x - 3 < \frac{1}{2}x - \frac{3}{10} \leq 3 - 0.6x$ 의 해의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 9 개

해설

i) $0.2x - 3 < \frac{1}{2}x - \frac{3}{10}$ 의 양변에 10을 곱하면

$$2x - 30 < 5x - 3$$

$$-3x < 27$$

$$x > -9$$

ii) $\frac{1}{2}x - \frac{3}{10} \leq 3 - 0.6x$ 의 양변에 10을 곱하면

$$5x - 3 \leq 30 - 6x$$

$$11x \leq 33$$

$$x \leq 3$$

부등식의 해는 $-9 < x \leq 3$, x 가 양이 아닌 정수이므로 $-8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0$ 의 9 개이다.

3. 이차방정식 $x^2 - 7x + 10 = 0$ 의 두 근이 이차방정식 $x^2 - 6x + k = 0$ 의 두 근 사이에 있기 위한 정수 k 의 최댓값은?

① 4

② 5

③ 6

④ 7

⑤ 8

해설

이차방정식 $x^2 - 7x + 10 = 0$ 에서
 $(x-2)(x-5) = 0 \therefore x = 2$ 또는 $x = 5$

$f(x) = x^2 - 6x + k$ 로 놓으면 함수 $y = f(x)$ 의

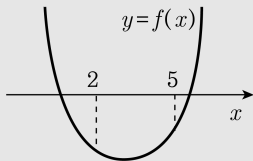
그래프는 다음 그림과 같아야 한다.

따라서 $f(2) < 0$, $f(5) < 0$ 이므로

$$f(2) = -8 + k < 0 \text{에서 } k < 8$$

$$f(5) = -5 + k < 0 \text{에서 } k < 5$$

$\therefore k < 5 \therefore$ 정수 k 의 최댓값은 4 이다.



4. 좌표평면 위의 두 점 $A(7, 4)$, $B(8, 6)$ 과 직선 $y = x$ 위를 움직이는 점 P 에 대하여 $\overline{PA} + \overline{PB}$ 의 값을 최소가 되게 하는 점 P 의 x 좌표를 a 라 할 때, $5a$ 의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 32

해설

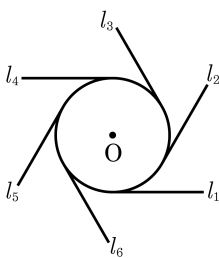
$A(7, 4)$ 를 $y = x$ 에 대칭이동한 점 $C(4, 7)$ 에 대하여 $\overline{PA} + \overline{PB}$ 가 최소인 점 P 는

선분 BC 와 직선 $y = x$ 의 교점이다.

$$y = -\frac{1}{4}x + 8 \text{와 } y = x \text{의 교점은 } \left(\frac{32}{5}, \frac{32}{5}\right)$$

$$\therefore 5a = 32$$

5. 형중이는 수차 제작을 위해 그림과 같은 설계를 하고 있다. $l_1, l_2, \dots, l_6$ 는 원주를 6 등분하는 점에서 원의 접선 방향으로 붙인 날개의 단면이다. 두 접선 l_1 과 l_2 의 연장선의 교점으로부터 원의 중심까지의 거리는 반지름의 몇 배인가?



① 2 배

② $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 배

③ $3\sqrt{5}$ 배

④ $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 배

⑤ 5 배

해설

그림에서 $l_1 : y = -r$ 라 놓으면

$$l_2 : y = \sqrt{3}x + k = \sqrt{3}x - 2r$$

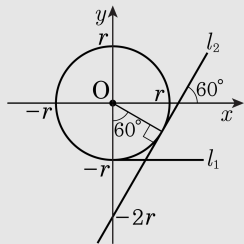
l_2 의 x 절편은 $\frac{2r}{\sqrt{3}}$ 이고

원의 반지름이 $\cos 30^\circ = \frac{r}{x}$ 이므로

$$x = r \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

따라서, 구하는 l_1 과 l_2 의 연장선의 교점으로부터

원의 중심까지의 거리는 반지름의 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 배이다.



6. 삼차방정식 $x^3 - 1 = 0$ 의 한 허근을 ω 라 할 때, 자연수 n 에 대하여 $f(n)$ 을 $f(n) = \frac{\omega^{2n}}{1 + \omega^n}$ 으로 정의하자. 이 때, $f(1) + f(2) + \cdots + f(8)$ 의 값은?

- ① -6 ② -5 ③ $-\frac{9}{2}$ ④ $-\frac{3}{2}$ ⑤ 0

해설

$$x^3 - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \omega^3 = 1, \omega^2 + \omega + 1 = 0$$

$$n = 3\alpha, 3\alpha + 1, 3\alpha + 2 \text{라 하자}$$

i) $n = 3\alpha$

$$\begin{aligned} f(n) &= \frac{\omega^{2n}}{1 + \omega^n} \\ &= \frac{(\omega^3)^{2\alpha}}{1 + (\omega^3)^\alpha} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

ii) $n = 3\alpha + 1$

$$\begin{aligned} f(n) &= \frac{(\omega^3)^{2\alpha} \times \omega^2}{1 + (\omega^3)^\alpha \times \omega} \\ &= \frac{\omega^2}{\omega + 1} \\ &= \frac{\omega^2}{-\omega^2} = -1 \end{aligned}$$

iii) $n = 3\alpha + 2$

$$\begin{aligned} f(n) &= \frac{(\omega^3)^{2\alpha} \times \omega^4}{1 + \omega^{3\alpha} \times \omega^2} \\ &= \frac{\omega^4}{1 + \omega^2} = \frac{\omega}{-\omega} = -1 \end{aligned}$$

$$\therefore f(1) + f(2) + \cdots + f(8)$$

$$= (-1 + -1 + \frac{1}{2}) + (-1 + -1 + \frac{1}{2}) + (-1 + -1)$$

$$= -5$$

7. 어떤 삼각형의 세 변의 길이가 긴 변부터 차례로 $4x+5$, $x+12$, $2x-3$ 이고, 세 변의 길이가 모두 자연수일 때, x 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

▷ 정답 : 3

해설

삼각형의 세 변의 길이 관계는

(가장 긴 변의 길이) < (다른 두 변의 길이의 합) 이어야 하므로

$$4x+5 < (2x-3) + (x+12)$$

$$\therefore x < 4 \cdots \textcircled{㉠}$$

또 변의 길이는 양수이어야 하므로

$$2x-3 > 0$$

$$\therefore x > \frac{3}{2} \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡의 공통범위를 구하면

$$\frac{3}{2} < x < 4$$

세 변의 길이가 모두 자연수이기 위해서 x 는 정수이어야 하므로

$$\therefore x = 2, 3$$

8. 점 P(3,2)를 지나며 기울기가 음수인 임의의 직선이 x 축, y 축과 만나는 점을 각각 A,B라 할 때, $\overline{OA} + \overline{OB}$ 의 최솟값을 구하면?(단, O는 원점)

① $6 + 2\sqrt{6}$

② $5 + 2\sqrt{6}$

③ $4 + 2\sqrt{6}$

④ $3 + 2\sqrt{6}$

⑤ $2 + 2\sqrt{6}$

해설

$a > 0$ 일때 음의 직선이므로, $y = -ax + b$

(3, 2)를 지나므로 $2 = -3a + b$, $b = 3a + 2$

x 축과의 교점:

$$0 = -a \cdot x + b, \quad ax = b, \quad x = \frac{b}{a} = \frac{3a + 2}{a} = 3 + \frac{2}{a}$$

$$\therefore A\left(3 + \frac{2}{a}, 0\right)$$

y 축과의 교점: $y = b = 3a + 2$

$$\therefore B(0, 3a + 2)$$

$$\therefore \overline{OA} + \overline{OB} = 3 + \frac{2}{a} + 3a + 2 \geq 5 + 2 \cdot \sqrt{6}$$

($\because a > 0$ 이기에 산술기하 성립)

따라서 구하는 최솟값은 $\therefore 5 + 2\sqrt{6}$

9. 좌표평면 위에서 점 $A(8, 6)$ 을 지나는 임의의 직선과 원점사이의 거리의 최댓값은?

① 6

② 8

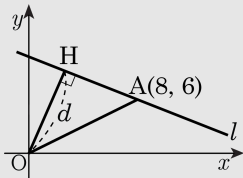
③ 10

④ 12

⑤ 14

해설

점 $A(8, 6)$ 을 지나는 직선을 l , 원점 O 에서 직선 l 에 내린 수선의 발을 H 라 하면 직각삼각형 OAH 에서 $\overline{OH} \leq \overline{OA}$ 이므로, 원점 O 에서 직선 l 까지의 거리 d 는 $d \leq \overline{OA} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$
 $\therefore d \leq 10$



따라서 d 의 최댓값은 10 이다.

10. 방정식 $x^5 = 1$ 의 허근을 ω 라 하자. $\alpha = \omega + \frac{1}{\omega}$ 일 때 $\alpha^2 + \alpha$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$$x^5 = 1, (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = 0$$

$$\therefore \omega^4 + \omega^3 + \omega^2 + \omega + 1 = 0$$

ω^2 으로 이 식을 나누면

$$\omega^2 + \omega + 1 + \frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega^2} = 0$$

$$\left(\omega^2 + \frac{1}{\omega^2}\right) + \left(\omega + \frac{1}{\omega}\right) + 1 = 0,$$

$$\left(\omega + \frac{1}{\omega}\right)^2 - 2 + \left(\omega + \frac{1}{\omega}\right) + 1 = 0$$

$$\therefore \alpha^2 + \alpha - 1 = 0, \alpha^2 + \alpha = 1$$

11. $x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 2x + 1 = 0$ 일 때, $x + \frac{1}{x}$ 의 값은? (단, x 는 실수)

① $-1 + \sqrt{6}$

② $-1 - \sqrt{6}$

③ $\frac{-3 + \sqrt{5}}{2}$

④ $\frac{-3 - \sqrt{5}}{2}$

⑤ 1

해설

(i) $x \neq 0$ 이므로

$x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 2x + 1 = 0$ 의 양변을

x^2 으로 나누면

$$x^2 + 2x - 3 + \frac{2}{x} + \frac{1^2}{x} = 0$$

$$\therefore \left(x^2 + \frac{1^2}{x}\right) + 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 3 = 0$$

$x + \frac{1}{x} = t$ 로 놓으면

$$(t^2 - 2) + 2t - 3 = 0, \quad t^2 + 2t - 5 = 0$$

$$\therefore t = -1 \pm \sqrt{6}$$

$$(ii) \quad x + \frac{1}{x} = -1 \pm \sqrt{6}$$

그런데 $\left|x + \frac{1}{x}\right| \geq 2$ 이므로

($\because x$ 는 실수)

$$\therefore x + \frac{1}{x} = -1 - \sqrt{6}$$

12. 사차방정식 $x^4 + 5x^3 - 4x^2 + 5x + 1 = 0$ 의 두 실근의 합을 구하면?

① -5

② -6

③ 0

④ 5

⑤ 6

해설

짝수차 상반방정식이므로

양변을 x^2 으로 나누면

$$x^2 + 5x - 4 + \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} = 0,$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 6 = 0$$

$$x + \frac{1}{x} = t \text{라 놓으면}$$

$$t^2 + 5t - 6 = 0, (t + 6)(t - 1) = 0$$

$$\therefore t = 1, -6$$

$$\text{즉, } x + \frac{1}{x} = 1, x + \frac{1}{x} = -6$$

$$\therefore x^2 - x + 1 = 0 \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$x^2 + 6x + 1 = 0 \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠식은 허근을 가지므로 조건에 맞지 않고

㉡식에서 두 실근의 합은

근과 계수와의 관계에서

$$\therefore \alpha + \beta = -6$$

13. 삼차방정식 $x^3 + (1 - 2a)x^2 + (a^2 - a + 1)x - a = 0$ 이 단 한 개의 실근을 갖게 하는 실수 a 의 값의 범위는? (단, 중근은 한 개의 해로 한다.)

① $-3 \leq a < 1$

② $-3 < a \leq 1$

③ $-1 \leq a < 3$

④ $-1 < a \leq 3$

⑤ $-2 \leq a < 1$

해설

$f(x) = x^3 + (1 - 2a)x^2 + (a^2 - a + 1)x - a$ 라 하면 $f(a) = 0$ 이므로

$$f(x) = (x - a) \{x^2 - (a - 1)x + 1\}$$

i) $x = a$ 가 삼중근일 때

$a^2 - (a - 1)a + 1 = 0$ 에서 $a = -1$ 여기서, $a = -1$ 일 때 $x = -1$ (삼중근)

ii) $x^2 - (a - 1)x + 1 = 0$ 이 허근을 가질 때

$$D = (a - 1)^2 - 4 < 0 \quad \therefore -1 < a < 3$$

i), ii)에서 $-1 \leq a < 3$

14. 서로 다른 세 실수 a, b, c 가 $a^3 - 6a = b^3 - 6b = c^3 - 6c = -1$ 을 만족시킬 때, $a^3 + b^3 + c^3$ 의 값은?

① 1

② -1

③ 3

④ -3

⑤ 6

해설

$a^3 - 6a = -1$, $b^3 - 6b = -1$, $c^3 - 6c = -1$ 이므로

a, b, c 는 삼차방정식 $x^3 - 6x = -1$

즉, $x^3 - 6x + 1 = 0$ 의 세 근이다.

따라서, 근과 계수와의 관계에서 $a + b + c = 0$, $ab + bc + ca = 6$, $abc = -1$

$\therefore a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$

에서 $a + b + c = 0$ 이므로 $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc = 3 \cdot (-1) = -3$

15. 사차방정식 $x^4 - 3x - 1 = 0$ 의 네 근을 x_1, x_2, x_3, x_4 라 할 때, $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4$ 의 값을 구하면?

① 2

② 4

③ 6

④ 8

⑤ 10

해설

$$x^4 = 3x + 1 \text{ 이므로}$$

$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4$$

$$= 3(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + 4$$

$$x^4 - 3x - 1$$

$$= (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$$

$$= x^4 - (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)x^3 + \cdots + x_1x_2x_3x_4$$

x^3 의 계수를 비교하면

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

$$\therefore x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 = 4$$

16. 주말 연속극을 시작하기 전에 상품 광고를 하려고 한다. 광고에는 광고 시간이 20초인 것과 25초인 것 두 종류가 있고, 광고 내용이 바뀔 때마다 1초 동안의 간격을 둔다. 정확하게 4분 30초 동안에 11개의 상품을 광고하고 싶다면 광고 시간이 20초인 상품을 몇 개 광고해야 하는지 구하면?

① 1개

② 3개

③ 5개

④ 7개

⑤ 9개

해설

20초 광고의 개수를 x ,

25초 광고의 개수를 y 라 할 때

11개의 광고들 사이의 간격은 $10 \times 1(\text{초}) = 10(\text{초})$

총 4분 30초는 $60 \times 4 + 30 = 270(\text{초})$ 이다.

$\therefore$ 광고에 사용되는 시간은 $270 - 10 = 260(\text{초})$

$$\begin{cases} x + y = 11 \\ 20x + 25y = 260 \end{cases}$$

두 식을 연립하여 풀면, $x = 3$, $y = 8$

따라서 20초 광고는 3개이다.

17. 부등식 $1 \leq |x - 1| < 6$ 을 만족하는 정수 x 중 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$1 \leq |x - 1| < 6$ 에서

1) $x \geq 1$ 일 때

$$1 \leq x - 1 < 6, 2 \leq x < 7$$

$$\therefore x = 2, 3, 4, 5, 6$$

2) $x < 1$ 일 때

$$1 \leq -x + 1 < 6, -5 < x \leq 0$$

$$\therefore x = -4, -3, -2, -1, 0$$

1), 2)에 의해서 부등식을 만족하는 정수 x 의 최댓값은 6, 최솟값은 -4

최댓값과 최솟값의 합은 $6 - 4 = 2$

18. 백의 자리의 숫자의 2 배와 일의 자리의 숫자의 합은 십의 자리의 숫자보다 작고, 각 자리의 숫자가 모두 자연수인 세 자리 자연수 중 가장 큰 수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 392

해설

세 자리 자연수를 $N = 100a + 10b + c$ 라 하면 a, b, c 는 모두 0 보다 크고 10 보다 작은 자연수이고 $b > 2a + c$ 이다. 따라서 $10 > b > 2a + c$ 에서 $10 > 2a + c$, 이때, $c > 0$ 이므로 $a < 5$

1) $a = 4$ 일 때

$$10 > b > 2a + c = 2 \times 4 + c = 8 + c$$

$$c \geq 1 \text{ 이므로 } 10 > b > 8 + c \geq 9$$

그런데 $b > 9$ 일 수 없으므로 $a \neq 4$

2) $a = 3$ 일 때

$$10 > b > 2a + c = 2 \times 3 + c = 6 + c$$

$$c \geq 1 \text{ 이므로 } 10 > b > 6 + c \geq 7$$

$$\therefore b = 8 \text{ 또는 } 9$$

1), 2)에서 N 은 가장 큰 수이므로 $a = 3, b = 9$

$b > 2a + c$ 에서 $9 > 6 + c$, 즉 $c < 3$ 이므로 $c = 2$

따라서 구하는 세 자리의 자연수는 392 이다.

19. 세 자연수의 평균이 5 이하이고, 세 자연수 중 두 개씩을 골라 합을 구했을 때, 그 비가 $6:9:11$ 인 세 자연수 중 가장 큰 수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

세 자연수를 각각 x, y, z 라 하면 세 자연수 중 두 개씩을 골라 합을 구했을 때, 그 비가 $6:9:11$ 이므로

$$x + y = 6k$$

$$y + z = 9k$$

$$z + x = 11k$$

각 변끼리 더하면 $x + y + z = 13k$

따라서 $x = 4k, y = 2k, z = 7k$

그런데 세 수의 평균이 5 이하이므로

$$\frac{x + y + z}{3} \leq 5 \text{ 에서 } 13k \leq 15$$

$$\therefore k \leq \frac{15}{13}$$

k 는 자연수이므로 $k = 1$

따라서 $x = 4, y = 2, z = 7$ 이고,

이 중 가장 큰 수는 7 이다.

20. $a < b < c$ 일 때, $|x - a| < |x - b| < |x - c|$ 의 해를 구하면?

① $x < \frac{a+b}{2}$

② $x > \frac{a+b}{2}$

③ $x < \frac{b+c}{2}$

④ $x > \frac{b+c}{2}$

⑤ $x < \frac{b-c}{2}$

해설

i) $|x - a| < |x - b|$ 에서 $(x - a)^2 < (x - b)^2$
 $(b - a)(2x - a - b) < 0, b - a > 0$ 이므로

$$x < \frac{a+b}{2}$$

ii) $|x - b| < |x - c|$ 에서 $(x - b)^2 < (x - c)^2$

$$(c - b)(2x - b - c) < 0, c - b > 0 \text{ 이므로 } x < \frac{b+c}{2}$$

i), ii) 에서 $x < \frac{a+b}{2} \left(\because \frac{a+b}{2} < \frac{b+c}{2} \right)$