

1. $X = \{-1, 0, 1\}$, $Y = \{0, 1, 2, 3\}$ 일 때, $x \in X$ 인 임의의 x 에 대한 다음의 대응 중에서 함수가 아닌 것은?

① $x \rightarrow 1$

② $x \rightarrow |x|$

③ $x \rightarrow x^2 + 1$

④ $x \rightarrow 2x$

⑤ $x \rightarrow x^2 + x + 1$

해설

④ $f(-1) = -2$ 이므로 함숫값이 공역에 존재하지 않으므로 함수가 아니다.

2. 양의 정수 전체의 집합 X 에서 Y 로의 함수 f 를 다음과 같이 정의한다.
 $f(x) = (x\text{의 약수의 개수})$ 이 때, 다음 중 $f(x) = 4$ 인 x 가 될 수 있는
것을 고르면?

① 5 ② 9 ③ 12 ④ 15 ⑤ 24

해설

5의 약수 : 1, 5 $\Rightarrow f(5) = 2$
9의 약수 : 1, 3, 9 $\Rightarrow f(9) = 3$
12의 약수 : 1, 2, 3, 4, 6, 12 $\Rightarrow f(12) = 6$
15의 약수 : 1, 3, 5, 15 $\Rightarrow f(15) = 4$
24의 약수 : 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24 $\Rightarrow f(24) = 8$
따라서 보기 중 $f(x) = 4$ 인 것은 15

3. 두 집합 $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{1, 2\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 8 개

▷ 정답 : 8 개

해설

1이 대응할 수 있는 원소는 1, 2의 2가지
2가 대응할 수 있는 원소는 1, 2의 2가지
3이 대응할 수 있는 원소는 1, 2의 2가지
따라서 X 에서 Y 로의 함수의 개수는
 $2 \times 2 \times 2 = 8$ (개)

4. $\frac{x-3}{x^2+x-6} \times \frac{x+3}{x^2-x-6}$ 을 간단히 계산한 것은?

① $\frac{1}{x^2+4}$

② $\frac{1}{x^2-x-2}$

③ $\frac{1}{x^2-2x+1}$

④ $\frac{1}{x^2+x-2}$

⑤ $\frac{1}{x^2-4}$

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= \frac{x-3}{(x+3)(x-2)} \times \frac{x+3}{(x-3)(x+2)} \\ &= \frac{1}{(x+2)(x-2)} = \frac{1}{x^2-4}\end{aligned}$$

5. 함수 $f(x) = \frac{ax+b}{x+c}$ 의 역함수가 $f^{-1}(x) = \frac{4x-3}{-x+2}$ 일 때, 상수 $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$$(f^{-1})^{-1} = f \text{ 이므로 } f^{-1}(x) = \frac{4x-3}{-x+2} \text{ 의}$$

역함수를 구하면

$$f(x) = \frac{2x+3}{x+4} = \frac{ax+b}{x+c}$$

$$\therefore a=2, b=3, c=4$$

$$\therefore 2+3+4=9$$

6. $3 + \sqrt{8}$ 의 소수 부분을 x 라 할 때, $\sqrt{x^2 + 4x}$ 의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

(1) 단계

$2 < \sqrt{8} < 3$ 이므로

$3 + \sqrt{8} - 2 + 2 = 5 + \sqrt{8} - 2$ 에서

소수 부분 $x = \sqrt{8} - 2$

(2) 단계

$x + 2 = \sqrt{8}$

(양변을 제곱하면) $x^2 + 4x + 4 = 8$,

$x^2 + 4x = 4$ 를 대입하면

(준식) $= \sqrt{4} = 2$

7. 함수 f, g 가 모든 실수 x 에 대하여 식 $(f \circ g)(x) = x$ 를 만족한다.
 $f(x) = 3x + 1$ 일 때, $g(3)$ 의 값을 구하면?

① $-\frac{2}{3}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

해설

$$(f \circ g)(x) = x \text{ 이므로 } g = f^{-1}$$

$$g(3) = f^{-1}(3) = a \text{ 라 하면}$$

$$f(a) = 3 \text{ 이므로 } 3a + 1 = 3$$

$$\therefore a = \frac{2}{3}$$

8. 부분분수를 이용하여 다음을 만족시키는 양수 x 를 구하여라.

$$\frac{1}{x(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+4)} + \frac{1}{(x+4)(x+6)} + \frac{1}{(x+6)(x+8)} = \frac{4}{9}$$

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 1

해설

주어진 식을 부분분수로 나타내면

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+4} \right) \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+6} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+6} - \frac{1}{x+8} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2} \right) + \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+4} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+6} \right) + \left(\frac{1}{x+6} - \frac{1}{x+8} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+8} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{x(x+8)} = \frac{4}{x(x+8)} \\ &= \frac{4}{9} \\ &\therefore x(x+8) = 9 \\ &x^2 + 8x - 9 = (x-1)(x+9) = 0 \\ &x > 0 \text{ 이므로 } x = 1 \end{aligned}$$

9. $x^4 - 5x^2 + 1 = 0$ 이고 $x < -1$ 일 때 $x - \frac{1}{x}$ 의 값을 구하면?

- ① $-\sqrt{3}$ ② $-\sqrt{2}$ ③ 1 ④ $\sqrt{3}$ ⑤ $\sqrt{2}$

해설

$$x^4 - 5x^2 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = 5$$

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 = 3$$

$$x - \frac{1}{x} = -\sqrt{3} \quad (\because x < -1)$$

10. $\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-4}} = \sqrt{\frac{x-2}{x-4}}$ 가 성립하지 않는 x 값 중에서 정수의 개수는?

- ① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

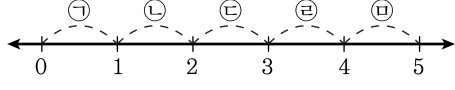
해설

$$x-2 > 0 \text{ 이고 } x-4 < 0$$

$$\therefore 2 < x < 4$$

따라서 정수인 x 는 3 뿐이므로 1 개 이다.

11. $f(a, b) = \sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}$ 로 정의할 때 $f(2, 1) + f(3, 2) + f(4, 3) + f(5, 4) + \dots + f(10, 9)$ 의 값이 k 라 하면, 다음 중 실수 k 에 대응하는 수는 직선 위에서 어느 위치에 있는가? (단, $a > b > 0$)



▶ 답 :

▷ 정답 : ㉣

해설

$a > b$ 일 때, $f(a, b) = \sqrt{a+b-2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$
 $\therefore f(2, 1) + f(3, 2) + f(4, 3) + \dots + f(10, 9)$
 $= (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + \dots$
 $+ (\sqrt{10} - \sqrt{9})$
 $= -1 + \sqrt{10} = k$
 그런데 $\sqrt{9} < \sqrt{10} < \sqrt{16}$ 에서
 $2 < -1 + \sqrt{10} < 3$ 이므로
 k 는 ㉣안에 있다.

12. $x = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3} + \sqrt{2}}{2}$, $y = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt{2}}{2}$ 일 때, $(x+y)^2 - (x-y)^2$ 의 값을 구하면?

① 2

② 3

③ $2\sqrt{3}$

④ $-2\sqrt{3}$

⑤ $2\sqrt{6}$

해설

$$\begin{aligned}x+y &= \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt{2}}{2} \\&= \sqrt{5} \\x-y &= \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3} + \sqrt{2} - \sqrt{5} - \sqrt{3} + \sqrt{2}}{2} \\&= \sqrt{2} - \sqrt{3} \\(x+y)^2 - (x-y)^2 &= 5 - (5 - 2\sqrt{6}) = 2\sqrt{6}\end{aligned}$$

13. 함수 $y = \sqrt{ax}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼 평행이동 한 그래프와 곡선 $y = \frac{40}{x} (x > 0)$ 이 만나는 점의 x 좌표가 10일 때, 상수 a 의 값은?
- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

함수 $y = \sqrt{ax}$ 의 그래프를
 x 축의 방향으로
2만큼 평행이동시키면
 $y = \sqrt{a(x-2)}$

이 그래프와 곡선 $y = \frac{40}{x}$ 이 만나는 점의
 x 좌표는 10이므로
 y 좌표는 $y = \frac{40}{10} = 4$
즉 교점의 좌표는 (10, 4)
이것을 $y = \sqrt{a(x-2)}$ 대입하면
 $4 = \sqrt{a(10-2)} = \sqrt{8a}$
 $\therefore a = 2$

14. $-5 \leq x \leq 3$ 일 때, 함수 $y = 2\sqrt{4-x} - 7$ 의 최댓값을 m , 최솟값을 n 라 할 때, $m+n$ 의 값은?

① -8 ② -6 ③ -4 ④ -2 ⑤ 0

해설

$$y = 2\sqrt{4-x} - 7 = 2\sqrt{-(x-4)} - 7$$

주어진 함수의 그래프는 $y = 2\sqrt{-x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 4만큼, y 축의 방향으로 -7만큼 평행이동한 것이므로 x 의 값이 증가할 때, y 의 값은 감소한다.

$$x = -5 \text{ 일 때, 최댓값 } m = 2\sqrt{4-(-5)} - 7 = -1$$

$$x = 3 \text{ 일 때, 최솟값 } n = 2\sqrt{4-3} - 7 = -5$$

$$\therefore m+n = -1 + (-5) = -6$$

15. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 f 에 대하여 $f\left(\frac{x+1}{2}\right) = 6x - 1$ 이다. $f\left(\frac{4-x}{3}\right) = ax + b$ 일 때, 두 상수 a, b 의 곱 ab 의 값은?

① -36 ② -20 ③ -4 ④ 20 ⑤ 36

해설

$$f\left(\frac{x+1}{2}\right) = 6x - 1 \text{ 에서 } \frac{x+1}{2} = t \text{ 라고 하면 } x = 2t - 1 \text{ 이므로}$$

$$f(t) = 6(2t - 1) - 1 = 12t - 7 \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

①에 t 대신에 $\frac{4-x}{3}$ 를 대입하면

$$f\left(\frac{4-x}{3}\right) = 12\left(\frac{4-x}{3}\right) - 7 = 16 - 4x - 7 = -4x + 9$$

$$\therefore ab = (-4) \cdot 9 = -36$$

16. 함수 $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ ($x \geq 0$) 의 역함수를 $g(x)$ 라 할때, $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프의 두 교점 사이의 거리를 구하면?

① 2 ② $2\sqrt{2}$ ③ 3 ④ $2\sqrt{3}$ ⑤ $3\sqrt{2}$

해설

$x \geq 0$ 에서 $y = f(x)$ 의 그래프와
직선 $y = x$ 의 교점의 x 좌표를 구하면
 $\frac{1}{2}x^2 = x$ 에서 $x^2 - 2x = 0$, $x(x - 2) = 0$
 $\therefore x = 0$ 또는 $x = 2$
따라서 두 교점의 좌표가 $(0, 0)$, $(2, 2)$ 이므로
두 교점 사이의 거리는 $\sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$

17. 소비자 단체에서 백화점의 할인 판매 상품의 가격을 조사하였더니, 각 백화점들은 상품의 정가를 원가보다 높게 거짓으로 표시하여 할인 판매를 하고 있었다. 표시된 정가보다 20 %를 할인하여 팔아도 12 %의 이익을 남기도록 하고 있었다면, 정가는 원가보다 몇 %를 더 높여 표시되었는가? (여기서, 원가는 업자의 이윤까지 포함된 정상적인 판매 가격이다.)

- ① 24 % ② 28 % ③ 32 % ④ 36 % ⑤ 40 %

해설

원가를 A 원이라 하고, $x\%$ 높게 정가를 정했다고 하자.

표시된 정가는 $A\left(1+\frac{x}{100}\right)$ 원

할인 판매 가격은 $A\left(1+\frac{x}{100}\right)\left(1-\frac{20}{100}\right)$ 이다.

원가에 12%의 이익이 있게 파는 가격은

$A\left(1+\frac{12}{100}\right)$ 이므로

$A\left(1+\frac{x}{100}\right)\left(1-\frac{20}{100}\right)=A\left(1+\frac{12}{100}\right)$

$\frac{100+x}{100}\cdot\frac{80}{100}A=\frac{112}{100}A$

$\frac{100+x}{100}=\frac{112}{100}\cdot\frac{100}{80}=\frac{7}{5}$

$\therefore x=\frac{7}{5}\times 100-100=40(\%)$

18. 함수 $f(x) = \begin{cases} 1 - \sqrt{x} & (x \geq 0) \\ \sqrt{2-x} & (x < 0) \end{cases}$ 에 대하여

$(f \circ f)(k) = 2$ 일 때, 상수 k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$(f \circ f)(k) = f(f(k)) = 2$ 에서

$f(k) = k'$ 이라 하면 $f(k') = 2$

i) $k' \geq 0$ 이면

$y = 1 - \sqrt{x}$ 이고, $y \leq 1$ 이므로

함숫값이 2 가 될 수 없다.

$\therefore k' < 0$

ii) $k' < 0$ 이므로

$$f(k') = \sqrt{2-k'} = 2$$

$$2 - k' = 4 \quad \therefore k' = -2$$

$f(k) = -2$ 인 k 의 값을 구하면 된다.

iii) $k < 0$ 이면

$y = \sqrt{2-x}$ ($x < 0$) 이고, $y > \sqrt{2}$ 이므로

함숫값이 -2 가 될 수 없다.

$\therefore k \geq 0$

iv) $k \geq 0$ 이므로

$$f(k) = 1 - \sqrt{k} = -2$$

$$\therefore k = 9$$

19. 모든 실수 x 에 대하여 식 $x^2f(x) + f(1-x) = x^4 - 2x$ 를 만족하는 함수 $f(x)$ 에 대하여 $f(2)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

식 $x^2f(x) + f(1-x) = x^4 - 2x$ 에서

$x = 2$ 를 대입하면

$$4f(2) + f(-1) = 12 \cdots \textcircled{1}$$

$x = -1$ 을 대입하면

$$f(-1) + f(2) = 3 \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 에서 $\textcircled{1} - \textcircled{2}$ 을 하면 $3f(2) = 9$

$$\therefore f(2) = 3$$

20. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ 에 대하여 A 에서 A 로의 함수 f 를 $f(x) = r$ (r 은 $3x$ 를 10으로 나눈 나머지)로 정의할 때, f^n 이 항등함수가 되는 최소의 자연수 n 의 값은? (단, $f^1 = f, f^{n+1} = f \circ f^n, n$ 은 자연수)

- ① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

함수 f 의 대응을 조사해 보면
 $1 \xrightarrow{f} 3 \xrightarrow{f} 9 \xrightarrow{f} 7 \xrightarrow{f} 1$
 $2 \xrightarrow{f} 6 \xrightarrow{f} 8 \xrightarrow{f} 4 \xrightarrow{f} 2$
 $5 \xrightarrow{f} 5 \xrightarrow{f} 5 \xrightarrow{f} 5 \xrightarrow{f} f 5$
 $\therefore f^4 = f^8 = f^{12} = \dots = I$ (항등함수)
 $\therefore$ 최소의 자연수는 4