1. $X = \{-1, 0, 1\}$, $Y = \{0, 1, 2, 3\}$일 때, $x \in X$인 임의의 x에 대한 다음의 대응 중에서 함수가 아닌 것은?

① $x \to 1$

② $x \to |x|$

③ $x \to x^2 + 1$

④ $x \to 2x$

⑤ $x \to x^2 + x + 1$

해설

④ $f(-1) = -2$ 이므로 함숫값이 공역에 존재하지 않으므로 함수가 아니다.

2. 양의 정수 전체의 집합 X에서 Y로의 함수 f를 다음과 같이 정의한다. $f(x) = (x$의 약수의 개수$)$ 이 때, 다음 중 $f(x) = 4$인 x가 될 수 있는 것을 고르면?

① 5 ② 9 ③ 12 ④ 15 ⑤ 24

해설

5 의 약수 : $1, 5 \Rightarrow f(5) = 2$
9 의 약수 :$1, 3, 9 \Rightarrow f(9) = 3$
12 의 약수 : $1, 2, 3, 4, 6, 12 \Rightarrow f(12) = 6$
15 의 약수 : $1, 3, 5, 15 \Rightarrow f(15) = 4$
24 의 약수 : $1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24 \Rightarrow f(24) = 8$
따라서 보기 중 $f(x) = 4$인 것은 15

3. 두 집합 $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{1, 2\}$에 대하여 X에서 Y로의 함수의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 8개

해설

1이 대응할 수 있는 원소는 1, 2의 2가지
2가 대응할 수 있는 원소는 1, 2의 2가지
3이 대응할 수 있는 원소는 1, 2의 2가지
따라서 X에서 Y로의 함수의 개수는
$2 \times 2 \times 2 = 8$(개)

4. $\dfrac{x-3}{x^2+x-6} \times \dfrac{x+3}{x^2-x-6}$ 을 간단히 계산한 것은?

① $\dfrac{1}{x^2+4}$ ② $\dfrac{1}{x^2-x-2}$ ③ $\dfrac{1}{x^2-2x+1}$

④ $\dfrac{1}{x^2+x-2}$ ⑤ $\dfrac{1}{x^2-4}$

해설

$$(\text{준식}) = \frac{x-3}{(x+3)(x-2)} \times \frac{x+3}{(x-3)(x+2)}$$

$$= \frac{1}{(x+2)(x-2)} = \frac{1}{x^2-4}$$

5. 함수 $f(x)=\dfrac{ax+b}{x+c}$ 의 역함수가 $f^{-1}(x)=\dfrac{4x-3}{-x+2}$ 일 때, 상수 $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$(f^{-1})^{-1}=f$ 이므로 $f^{-1}(x)=\dfrac{4x-3}{-x+2}$ 의 역함수를 구하면

$f(x)=\dfrac{2x+3}{x+4}=\dfrac{ax+b}{x+c}$

$\therefore\ a=2,\ b=3,\ c=4$

$\therefore\ \ 2+3+4=9$

6. $3+\sqrt{8}$의 소수 부분을 x라 할 때, $\sqrt{x^2+4x}$의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

(1) 단계

$2 < \sqrt{8} < 3$이므로

$3+\sqrt{8}-2+2 = 5+\sqrt{8}-2$ 에서

소수 부분 $x = \sqrt{8}-2$

(2) 단계

$x+2 = \sqrt{8}$

(양변을 제곱하면) $x^2+4x+4 = 8$,

$x^2+4x = 4$를 대입하면

(준식)$= \sqrt{4} = 2$

7. 함수 f, g 가 모든 실수 x 에 대하여 식 $(f \circ g)(x) = x$ 를 만족한다. $f(x) = 3x + 1$ 일 때, $g(3)$ 의 값을 구하면?

① $-\frac{2}{3}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

해설

$(f \circ g)(x) = x$ 이므로 $g = f^{-1}$

$g(3) = f^{-1}(3) = a$ 라 하면

$f(a) = 3$ 이므로 $3a + 1 = 3$

$\therefore\ a = \frac{2}{3}$

8. 부분분수를 이용하여 다음을 만족시키는 양수 x 를 구하여라.

$$\frac{1}{x(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+4)}$$
$$+\frac{1}{(x+4)(x+6)}+\frac{1}{(x+6)(x+8)}=\frac{4}{9}$$

▶ 답:

▷ 정답: 1

해설

주어진 식을 부분분수로 나타내면

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+4}\right)$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+6}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+6}-\frac{1}{x+8}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}\right)+\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+4}\right)\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+6}\right)+\left(\frac{1}{x+6}-\frac{1}{x+8}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+8}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{x(x+8)}=\frac{4}{x(x+8)}$$
$$=\frac{4}{9}$$
$\therefore x(x+8)=9$

$x^2+8x-9=(x-1)(x+9)=0$

$x>0$ 이므로 $x=1$

9. $x^4 - 5x^2 + 1 = 0$ 이고 $x < -1$ 일 때 $x - \frac{1}{x}$ 의 값을 구하면?

① $-\sqrt{3}$ ② $-\sqrt{2}$ ③ 1 ④ $\sqrt{3}$ ⑤ $\sqrt{2}$

해설

$x^4 - 5x^2 + 1 = 0$

$\Rightarrow \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = 5$

$\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 = 3$

$x - \frac{1}{x} = -\sqrt{3}\ (\because\ x < -1)$

10. $\dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-4}} = \sqrt{\dfrac{x-2}{x-4}}$ 가 성립하지 않는 x 값 중에서 정수의 개수는?

① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

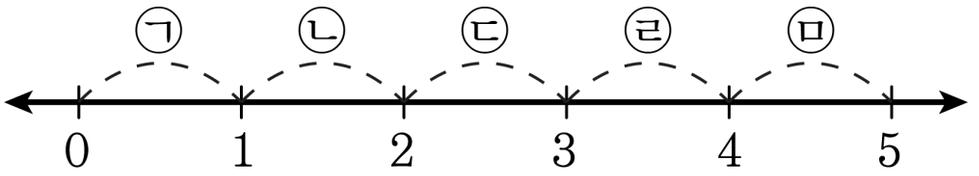
해설

$x-2>0$ 이고 $x-4<0$

$\therefore\ 2<x<4$

따라서 정수인 x 는 3 뿐이므로 1 개 이다.

11. $f(a,\ b)=\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}$ 로 정의할 때 $f(2,\ 1)+f(3,\ 2)+f(4,\ 3)+f(5,\ 4)+\cdots+f(10,\ 9)$ 의 값이 k 라 하면, 다음 중 실수 k 에 대응하는 수는 직선 위에서 어느 위치에 있는가? (단, $a>b>0$)



▶ 답 :

▷ 정답 : ㉢

해설

$a>b$ 일 때, $f(a,\ b)=\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$

$\therefore\ f(2,\ 1)+f(3,\ 2)+f(4,\ 3)+\cdots+f(10,\ 9)$

$=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots$

$\quad+(\sqrt{10}-\sqrt{9})$

$=-1+\sqrt{10}=k$

그런데 $\sqrt{9}<\sqrt{10}<\sqrt{16}$ 에서

$2<-1+\sqrt{10}<3$ 이므로

k 는 ㉢안에 있다.

12. $x=\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$, $y=\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$ 일 때, $(x+y)^2-(x-y)^2$ 의 값을 구하면?

① 2 ② 3 ③ $2\sqrt{3}$

④ $-2\sqrt{3}$ ⑤ $2\sqrt{6}$

해설

$$x+y=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$$

$$=\sqrt{5}$$

$$x-y=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$$

$$=\sqrt{2}-\sqrt{3}$$

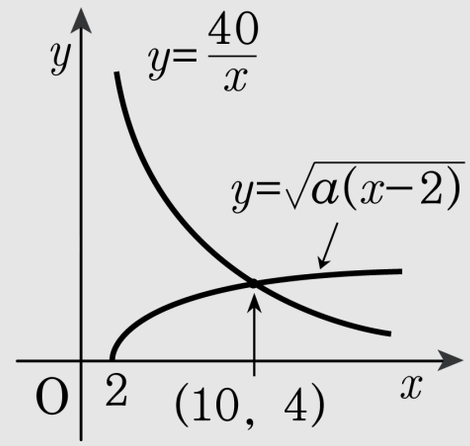
$$(x+y)^2-(x-y)^2=5-(5-2\sqrt{6})=2\sqrt{6}$$

13. 함수 $y = \sqrt{ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동 한 그래프와 곡선 $y = \dfrac{40}{x}(x > 0)$이 만나는 점의 x좌표가 10일 때, 상수 a의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

함수 $y = \sqrt{ax}$ 의 그래프를
x 축의 방향으로
2 만큼 평행이동시키면
$y = \sqrt{a(x-2)}$



이 그래프와 곡선 $y = \dfrac{40}{x}$ 이 만나는 점의
x좌표는 10이므로
y좌표는 $y = \dfrac{40}{10} = 4$
즉 교점의 좌표는 $(10, 4)$
이것을 $y = \sqrt{a(x-2)}$ 대입하면
$4 = \sqrt{a(10-2)} = \sqrt{8a}$
$\therefore a = 2$

14. $-5 \le x \le 3$ 일 때, 함수 $y = 2\sqrt{4-x} - 7$ 의 최댓값을 m , 최솟값을 n 라 할 때, $m+n$ 의 값은?

① -8 ② -6 ③ -4 ④ -2 ⑤ 0

해설

$y = 2\sqrt{4-x} - 7 = 2\sqrt{-(x-4)} - 7$

주어진 함수의 그래프는 $y = 2\sqrt{-x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 4 만큼, y 축의 방향으로 -7 만큼 평행이동한 것이므로 x 의 값이 증가할 때, y 의 값은 감소한다.

$x = -5$ 일 때, 최댓값 $m = 2\sqrt{4-(-5)} - 7 = -1$

$x = 3$ 일 때, 최솟값 $n = 2\sqrt{4-3} - 7 = -5$

$\therefore\ m+n = -1 + (-5) = -6$

15. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 f 에 대하여 $f\left(\frac{x+1}{2}\right) = 6x - 1$ 이다. $f\left(\frac{4-x}{3}\right) = ax + b$ 일 때, 두 상수 a, b 의 곱 ab 의 값은?

① -36 ② -20 ③ -4 ④ 20 ⑤ 36

해설

$f\left(\frac{x+1}{2}\right) = 6x - 1$ 에서 $\frac{x+1}{2} = t$ 라고 하면 $x = 2t - 1$ 이므로

$f(t) = 6(2t-1) - 1 = 12t - 7$ ……㉠

㉠에 t 대신에 $\frac{4-x}{3}$ 를 대입하면

$f\left(\frac{4-x}{3}\right) = 12\left(\frac{4-x}{3}\right) - 7 = 16 - 4x - 7 = -4x + 9$

$\therefore\ ab = (-4) \cdot 9 = -36$

16. 함수 $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ $(x \geq 0)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할때, $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프의 두 교점 사이의 거리를 구하면?

① 2 ② $2\sqrt{2}$ ③ 3 ④ $2\sqrt{3}$ ⑤ $3\sqrt{2}$

해설

$x \geq 0$ 에서 $y = f(x)$ 의 그래프와
직선 $y = x$ 의 교점의 x 좌표를 구하면

$\frac{1}{2}x^2 = x$ 에서 $x^2 - 2x = 0$, $x(x-2) = 0$

$\therefore x = 0$ 또는 $x = 2$

따라서 두 교점의 좌표가 $(0,\ 0)$, $(2,\ 2)$ 이므로

두 교점 사이의 거리는 $\sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$

17. 소비자 단체에서 백화점의 할인 판매 상품의 가격을 조사하였더니, 각 백화점들은 상품의 정가를 원가보다 높게 거짓으로 표시하여 할인 판매를 하고 있었다. 표시된 정가보다 20 %를 할인하여 팔아도 12 %의 이익을 남기도록 하고 있었다면, 정가는 원가보다 몇 %를 더 높여 표시되었는가? (여기서, 원가는 업자의 이윤까지 표함된 정상적인 판매 가격이다.)

① 24 %　② 28 %　③ 32 %　④ 36 %　⑤ 40 %

해설

원가를 A 원이라 하고, x %높게 정가를 정했다고 하자.

표시된 정가는 $A\left(1+\frac{x}{100}\right)$ 원

할인 판매 가격은 $A\left(1+\frac{x}{100}\right)\left(1-\frac{20}{100}\right)$ 이다.

원가에 12 %의 이익이 있게 파는 가격은

$A\left(1+\frac{12}{100}\right)$ 이므로

$$A\left(1+\frac{x}{100}\right)\left(1-\frac{20}{100}\right)=A\left(1+\frac{12}{100}\right)$$

$$\frac{100+x}{100}\cdot\frac{80}{100}A=\frac{112}{100}A$$

$$\frac{100+x}{100}=\frac{112}{100}\cdot\frac{100}{80}=\frac{7}{5}$$

$$\therefore x=\frac{7}{5}\times 100-100=40(\%)$$

18. 함수 $f(x)=\begin{cases}1-\sqrt{x} & (x\geq 0)\\ \sqrt{2-x} & (x<0)\end{cases}$ 에 대하여 $(f\circ f)(k)=2$ 일 때, 상수 k 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 9

해설

$(f\circ f)(k)=f(f(k))=2$ 에서
$f(k)=k'$ 이라 하면 $f(k')=2$
i) $k'\geq 0$ 이면
$y=1-\sqrt{x}$이고, $y\leq 1$ 이므로
함숫값이 2 가 될 수 없다.
$\therefore\ k'<0$
ii) $k'<0$ 이므로
$f(k')=\sqrt{2-k'}=2$
$2-k'=4 \quad \therefore\ k'=-2$
$f(k)=-2$ 인 k 의 값을 구하면 된다.
iii) $k<0$ 이면
$y=\sqrt{2-x}\ (x<0)$ 이고, $y>\sqrt{2}$ 이므로
함숫값이 -2 가 될 수 없다.
$\therefore\ k\geq 0$
iv) $k\geq 0$ 이므로
$f(k)=1-\sqrt{k}=-2$
$\therefore\ k=9$

19. 모든 실수 x 에 대하여 식 $x^2f(x)+f(1-x)=x^4-2x$ 를 만족하는 함수 $f(x)$ 에 대하여 $f(2)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

식 $x^2f(x)+f(1-x)=x^4-2x$ 에서
$x=2$ 를 대입하면
$4f(2)+f(-1)=12 \cdots$ ㉠
$x=-1$ 을 대입하면
$f(-1)+f(2)=3 \cdots$ ㉡
㉠, ㉡ 에서 ㉠ − ㉡ 을 하면 $3f(2)=9$
$\therefore\ f(2)=3$

20. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$에 대하여 A에서 A로의 함수 f를 $f(x) = r$(r은 $3x$를 10으로 나눈 나머지)로 정의할 때, f^n이 항등함수가 되는 최소의 자연수 n의 값은? (단, $f^1 = f$, $f^{n+1} = f \circ f^n$, n은 자연수)

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

함수 f의 대응을 조사해 보면

$1 \xrightarrow{f} 3 \xrightarrow{f} 9 \xrightarrow{f} 7 \xrightarrow{f} 1$

$2 \xrightarrow{f} 6 \xrightarrow{f} 8 \xrightarrow{f} 4 \xrightarrow{f} 2$

$5 \xrightarrow{f} 5 \xrightarrow{f} 5 \xrightarrow{f} 5 \xrightarrow{f} f\ 5$

$\therefore\ f^4 = f^8 = f^{12} = \cdots = I$(항등함수)

$\therefore$ 최소의 자연수는 4