

1. 자연수 전체의 집합을 N 이라 할 때, N 의 임의의 원소 x 에 대하여 다음 대응 중 N 에서 N 으로의 함수인 것은?

- ① $x \rightarrow x - 1$
- ② $x \rightarrow x$ 의 양의 제곱근
- ③ $x \rightarrow x$ 를 4 로 나눈 나머지
- ④ $x \rightarrow x^2 - 1$
- ⑤ $x \rightarrow |-1|$

해설

- ① $x = 1$ 일 때, $1 \in N$ 이지만 $1 - 1 = 0 \notin N$ 따라서 함수가 아니다.
- ② $x = 2$ 일 때, $2 \in N$ 이지만 2 의 양의 제곱근 $\sqrt{2} \notin N$ 따라서 함수가 아니다.
- ③ $x = 4$ 일 때, $4 \in N$ 이지만 4 를 4 로 나눈 나머지 $0 \notin N$ 따라서 함수가 아니다.
- ④ $x = 1$ 일 때, $1 \in N$ 이지만 $1^2 - 1 = 0 \notin N$ 따라서 함수가 아니다.
- ⑤ 정의역의 모든 원소가 1 에 대응하므로 함수이다.

2. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 세 함수 f, g, h 에 대하여 $(h \circ g)(x) = 3x + 4$, $f(x) = x^2$ 일 때, $(h \circ (g \circ f))(2)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$$\begin{aligned}(h \circ (g \circ f))(2) &= ((h \circ g) \circ f)(2) \\ &= (h \circ g)(f(2)) \\ &= (h \circ g)(4) \\ &= 3 \times 4 + 4 = 16\end{aligned}$$

3. 함수 $f(x) = ax + b$ 에 대하여 $f^{-1}(1) = 2$, $f(1) = 2$ 일 때, $f(3)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

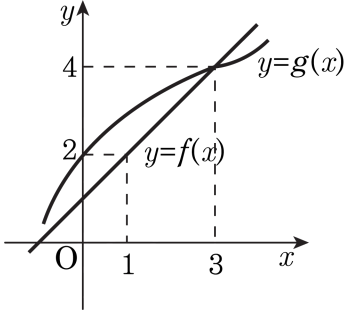
해설

$$f(2) = 2a + b = 1, \quad f(1) = a + b = 2$$

$$\text{연립하면 } a = -1, \quad b = 3$$

$$\therefore f(3) = 3a + b = 0$$

4. 두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 가 각각 일대일대응이고 그 그래프가 다음 그림과 같을 때, $(g^{-1} \circ f)(1) + g(3)$ 의 값은 얼마인가?



- ① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 7

해설

주어진 식을 간단히 하면
 $(g^{-1} \circ f)(1) + g(3) = g^{-1}(f(1)) + 4$
 $= g^{-1}(2) + 4$
 $g^{-1}(2) = k$ 로 놓으면 $g(k) = 2$
문제의 그림에서 $y = g(x)$ 의 그래프가
 $(0, 2)$ 를 지나므로 $g(0) = 2$
이 때, $y = g(x)$ 는 일대일대응이므로 $k = 0$
 $\therefore g^{-1}(2) + 4 = 0 + 4 = 4$

5. 다음 식을 만족하는 x 의 값을 구하여라.

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{x}}} = 10$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -9

해설

$$\begin{aligned}\frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{x}}} &= \frac{1}{1 - \frac{x}{x-1}} = \frac{x-1}{x-1-x} = 1-x \\ 1-x &= 10 \\ \therefore x &= -9\end{aligned}$$

6. 함수 $y = \frac{1-2x}{x-2}$ 의 그래프는 $y = \frac{k}{x}$ 의 그래프를 x 축 방향으로 a 만큼, y 축 방향으로 b 만큼 평행이동 시킨 것이다. 여기서 $k+a+b$ 의 값은?

① -3 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 3

해설

$$y = \frac{-2x+1}{x-2} = \frac{-2(x-2)-3}{x-2} = \frac{-3}{x-2} - 2$$

따라서 주어진 함수의 그래프는 $y = \frac{-3}{x}$ 의

그래프를 x 축의 방향으로 2만큼,

y 축의 방향으로 -2만큼 평행이동 시킨 것이므로

$$k = -3, a = 2, b = -2$$

$$\therefore k+a+b = -3+2-2 = -3$$

7. $f(x) = 3x - 2$, $g(x) = 3x + 4$ 에 대하여 $(f \circ (g \circ f)^{-1} \circ f)(3)$ 의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$\begin{aligned}(f \circ (g \circ f)^{-1} \circ f)(3) &= (f \circ f^{-1} \circ g^{-1} \circ f)(3) \\&= (I \circ g^{-1} \circ f)(3) \\&= (g^{-1} \circ f)(3) \\&= g^{-1}(f(3)) \\&= g^{-1}(7)\end{aligned}$$

$$g^{-1}(7) = a \text{ 라 하면 } g(a) = 7, 3a + 4 = 7$$

$$\therefore a = 1$$

8. 분수식 $\frac{x^2}{(x-y)(x-z)} + \frac{y^2}{(y-x)(y-z)} + \frac{z^2}{(z-x)(z-y)}$ 를 간단히 하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$\frac{x^2(z-y) + y^2(z-x) + z^2(y-x)}{(x-y)(y-z)(z-x)} \dots \textcircled{1}$$

①에서 분자를 x 에 관하여 정리하면

$$x^2(z-y) + y^2(z-x) + z^2(y-x)$$

$$= (z-y)x^2 - (z^2 - y^2)x + yz^2 - y^2z$$

$$= (z-y)x^2 - (z+y)(z-y)x + zy(z-y)$$

$$= (z-y)\{x^2 - (z+y)x + zy\}$$

$$= (z-y)(x-z)(x-y) = (x-y)(y-z)(z-x)$$

$$\therefore \text{(준식)} = \frac{(x-y)(y-z)(z-x)}{(x-y)(y-z)(z-x)} = 1$$

9. 부분분수를 이용하여 다음을 만족시키는 양수 x 를 구하여라.

$$\frac{1}{x(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+4)} + \frac{1}{(x+4)(x+6)} + \frac{1}{(x+6)(x+8)} = \frac{4}{9}$$

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 1

해설

주어진 식을 부분분수로 나타내면

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+4} \right) \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+6} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+6} - \frac{1}{x+8} \right) \\ & = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2} \right) + \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+4} \right) \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+6} \right) + \left(\frac{1}{x+6} - \frac{1}{x+8} \right) \right\} \\ & = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+8} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{x(x+8)} = \frac{4}{x(x+8)} \\ & = \frac{4}{9} \\ & \therefore x(x+8) = 9 \\ & x^2 + 8x - 9 = (x-1)(x+9) = 0 \\ & x > 0 \text{ 이므로 } x = 1 \end{aligned}$$

10. $\frac{2x+y}{2} = \frac{2y+z}{3} = \frac{2z+x}{4}$ 일 때 $\frac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2}$ 의 값을 구하면?
- ① $\frac{3}{11}$ ② $\frac{5}{11}$ ③ $\frac{6}{11}$ ④ $\frac{8}{11}$ ⑤ $\frac{9}{11}$

해설

$$\frac{2x+y}{2} = \frac{2y+z}{3} = \frac{2z+x}{4} = k \text{ 라 하면}$$

$$2x+y=2k \cdots \textcircled{1}$$

$$2y+z=3k \cdots \textcircled{2}$$

$$2z+x=4k \cdots \textcircled{3}$$

②, ③에서 z 를 소거하면

$$x-4y=-2k \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{1} \times 4 + \textcircled{4} \text{에서 } x = \frac{2}{3}k, y = \frac{2}{3}k$$

$$\text{이것을 ②에 대입하면 } z = \frac{5}{3}k$$

$$\text{따라서 } x:y:z = \frac{2}{3}k : \frac{2}{3}k : \frac{5}{3}k = 2:2:5$$

$$x=2t, y=2t, z=5t \text{ 라 하면}$$

$$(\text{준식}) = \frac{4t^2+10t^2+10t^2}{(2t)^2+(2t)^2+(5t)^2} = \frac{24t^2}{33t^2} = \frac{8}{11}$$

11. 유리함수 $y = \frac{bx+c}{x+a}$ 의 그래프가 점 $(0, 2)$ 를 지나고 두 직선 $x = -1, y = 3$ 을 점근선으로 가질 때 $a+b+c$ 의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$x = -1, y = 3$ 이 점근선 이므로

$$y = \frac{bx+c}{x+a} = \frac{k}{x+1} + 3$$

점 $(0, 2)$ 를 지나므로 $k = -1$

$$\therefore y = \frac{-1}{x+1} + 3 = \frac{-1+3x+3}{x+1} = \frac{3x+2}{x+1}$$

이 함수가 $y = \frac{bx+c}{x+a}$ 와 일치해야 하므로

$$a = 1, b = 3, c = 2$$

$$\therefore a+b+c = 6$$

12. $a = \sqrt{2 + \sqrt{3}}, b = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$ 일 때, $a^3 + b^3$ 의 값을 구하여라. (단, p, q 는 정수)

▶ 답 :

▷ 정답 : $3\sqrt{6}$

해설

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{2 + \sqrt{3}} = \sqrt{\frac{4 + 2\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= \sqrt{2 - \sqrt{3}} = \sqrt{\frac{4 - 2\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

$$a + b = \sqrt{6}, ab = 1$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b) = 6\sqrt{6} - 3\sqrt{6} = 3\sqrt{6}$$

13. 함수 $y = \sqrt{-2x+a}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동하였더니 함수 $y = \sqrt{-2x+4} - 3$ 의 그래프와 겹쳐졌다. 이 때, 상수 a, b 의 값을 각각 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 2$

▷ 정답 : $b = -3$

해설

함수 $y = \sqrt{-2x+a}$ 의 그래프를
 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 b 만큼
평행이동한 함수의 그래프의 식은
 $y = \sqrt{-2(x-1)+a+b} = \sqrt{-2x+2+a+b}$
이 식이 $y = \sqrt{-2x+4} - 3$ 과 같으므로
 $2+a=4, b=-3$
 $\therefore a=2, b=-3$

14. 정의역이 $\{x \mid x > 1\}$ 인 두 함수 $f(x) = \frac{1}{x+1}$, $g(x) = \sqrt{3(x-1)}$ 에 대하여 $(f \circ g)^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)$ 의 값은?

- ① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$(f \circ g)^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) = a$ 라 하면
 $(f \circ g)(a) = \frac{1}{4}$ 이고
 $f(g(a)) = f(\sqrt{3(a-1)})$
 $= \frac{1}{\sqrt{3(a-1)}+1}$ 이므로
 $\frac{1}{\sqrt{3(a-1)}+1} = \frac{1}{4}$
 $\sqrt{3(a-1)}+1 = 4,$
 $\sqrt{3(a-1)} = 3$
 $3(a-1) = 9, a-1 = 3, a = 4$
 $\therefore (f \circ g)^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) = 4$

15. 집합 $A = \{1, 2, 3\}$ 에서 집합 $B = \{3, 4, 5, 6\}$ 로의 함수 f 가 일대일 함수이다. f 중에서 임의의 x 에 대하여 $f(x) \neq x$ 인 것의 개수는?

① 14 개 ② 18 개 ③ 20 개 ④ 24 개 ⑤ 27 개

해설

일대일 대응 함수는

$f(1)$: 4 가지

$f(2)$: 3 가지

$f(3)$: 2 가지

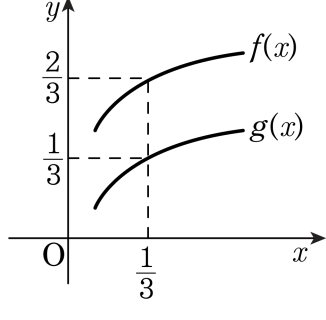
$\therefore 4 \times 3 \times 2 = 24$ (가지)

그런데 $f(3) = 3$ 인 것이 6 가지 이므로

$f(x) \neq x$ 인 것은

$\therefore 24 - 6 = 18$ (가지)

16. 두 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 가 다음 성질을 만족시킨다. 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 의 그래프의 일부가 각각 다음과 같을 때, $f\left(g\left(-\frac{7}{3}\right)\right)$ 의 값은?



- I. $f(x)$ 와 $g(x)$ 는 주기가 2인 주기함수이다.
 II. 임의의 실수 x 에 대하여 $f(-x) = f(x)$, $g(-x) = -g(x)$

- ① $-\frac{2}{3}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

해설

$g(x)$ 의 주기는 2이므로

$$g\left(-\frac{7}{3}\right) = g\left(-\frac{7}{3} + 2\right) = g\left(-\frac{1}{3}\right) = -g\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3}$$

$$\therefore f\left(g\left(-\frac{7}{3}\right)\right) = f\left(-\frac{1}{3}\right) = f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

17. $x = \sqrt{3 - \sqrt{8}}$ 일 때 $\frac{x^3 + x^2 - 3x + 6}{x^4 + 2x^3 + 2x + 9}$ 의 값은?

① 1

② 2

③ $\frac{1}{2}$

④ $\frac{1}{4}$

⑤ $\frac{1}{3}$

해설

$$x = \sqrt{3 - \sqrt{8}} = \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1 \text{ 에서}$$

$$x + 1 = \sqrt{2} \rightarrow x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$\text{분자 : } x^3 + x^2 - 3x + 6$$

$$= (x^2 + 2x - 1)(x - 1) + 5 = 5$$

$$\text{분모 : } x^4 + 2x^3 + 2x + 9$$

$$= (x^2 + 2x - 1)(x^2 + 1) + 10 = 10$$

$$\therefore \text{준식} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

18. 함수 $y = \frac{ax+8}{x+b}$ 의 그래프의 점근선의 방정식이 $x = 6, y = -1$ 일 때, 함수 $y = \sqrt{bx-a}$ 의 정의역에 속하는 정수의 최댓값은? (단, a, b 는 상수이다.)

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$y = \frac{ax+8}{x+b} = \frac{8-ab}{x+b} + a \text{ 이고}$$

점근선의 방정식이 $x = -b = 6, y = a = -1$ 이므로 $a = -1, b = -6$

함수 $y = \sqrt{-6x+1}$ 의 정의역은 $\left\{x \mid x \leq \frac{1}{6}\right\}$ 이므로 구하는 정수의 최댓값은 0 이다.

19. 방정식 $|x|+|y| = 2$ 의 그래프로 둘러싸인 도형은 함수 $y = \frac{1}{2}(|x-x|)+1$ 의 그래프에 의하여 두 부분으로 나누어진다. 이 때, 작은 부분의 넓이를 구하면?

- ① $\frac{2}{3}$
- ② $\frac{3}{4}$
- ③ 1
- ④ $\frac{7}{5}$
- ⑤ 3

해설

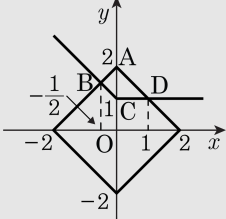
$y = \frac{1}{2}(|x-x|)+1$ 에서

(i) $x \geq 0$ 일 때, $|x| = x$ 이므로

$y = \frac{1}{2}(x-x)+1 = 1$

(ii) $x < 0$ 일 때, $|x| = -x$ 이므로

$y = \frac{1}{2}(-x-x)+1 = -x+1$



따라서 $y = \frac{1}{2}(|x-x|)+1$ 과 $|x|+|y| = 2$ 의 그래프는 위의 그림과 같다.

그러므로 구하는 작은 사각형 ABCD 의 넓이는

$\triangle ABC + \triangle ACD = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{3}{4}$

20. 두 함수 $y = \sqrt{x-1}$ 과 $y = mx$ 의 그래프가 만날 때, 실수 m 의 값의 범위는?

- ① $0 < m \leq \frac{1}{2}$

② $0 \leq m < \frac{1}{2}$

③ $0 \leq m \leq \frac{1}{2}$
- ④ $-\frac{1}{2} \leq m < 0$

⑤ $-\frac{1}{2} \leq m \leq 0$

해설

$y = \sqrt{x-1}$ 의 그래프는 $y = \sqrt{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1 만큼평행이동한 것이고

또 $y = mx$ 는 원점을 지나는 직선이다. 다음 그림에서 곡선과 직선이 접하기 위해서는

$mx = \sqrt{x-1}$ 이 중근을 가져야 한다.

즉 $m^2x^2 - x + 1 = 0$ 에서

$$D = 1 - 4m^2 = 0, \therefore m = \frac{1}{2} (\because m > 0)$$

또한 $m = 0$ 일 때는 곡선과 직선이 점 (1, 0) 에서 만난다.

따라서 두 함수 $y = \sqrt{x-1}$ 과 $y = mx$ 의 그래프가 만나기 위한

m 의 값의 범위는

$$\therefore 0 \leq m \leq \frac{1}{2}$$

