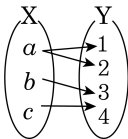
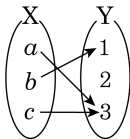


1. 다음 대응 중 함수인 것은?

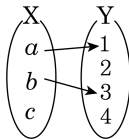
①



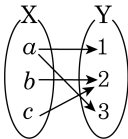
②



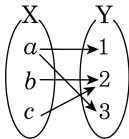
③



④



⑤



해설

집합 X 의 모든 원소 각각에 대하여 집합 Y 의 원소가 하나씩만 대응하여야 하므로 함수의 정의에 맞는 것은 ②번이다.

2. 두 집합 $X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $Y = \{y | y \text{는 정수}\}$ 일 때, 함수 $f : X \rightarrow Y$ 를 다음과 같이 정의한다. 이 때, f 의 치역의 모든 원소의 합을 구하여라.

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & (x > 0) \\ -x^2 + 1 & (x \leq 0) \end{cases}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$f(-2) = -(-2)^2 + 1 = -3$$

$$f(-1) = -(-1)^2 + 1 = 0$$

$$f(0) = 1$$

$$f(1) = 1 + 2 = 3$$

$$f(2) = 2 + 2 = 4$$

따라서 치역은 $\{-3, 0, 1, 3, 4\}$ 이므로

$$\text{모든 원소의 합은 } (-3) + 0 + 1 + 3 + 4 = 5$$

3. 실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 에 대하여 $f(x)$ 는 항등함수이고, 모든 실수 x 에 대하여 $g(x) = -2$ 일 때, $f(4) + g(-1)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

$f(x)$ 는 항등함수이므로 $f(4) = 4$
모든 x 에 대하여 $g(x) = -2$ 이므로
 $g(x)$ 는 상수함수이다.
즉, $g(-1) = -2$
 $\therefore f(4) + g(-1) = 4 + (-2) = 2$

4. 두 집합 $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 중 일대일 대응인 것의 개수를 구하면?

① 2

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 6

해설

a, b, c 에 대응하는 원소를

순서쌍 $(f(a), f(b), f(c))$ 으로 나타내면

$(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2),$

$(3, 2, 1)$ 이므로

X 에서 Y 로의 함수 중 일대일 대응인 것의 개수는 6개이다.

5. 함수 $f(x) = 2x - 3$ 에 대하여 $f^{-1}(2)$ 의 값은?

① $\frac{3}{2}$

② 2

③ $\frac{5}{2}$

④ 3

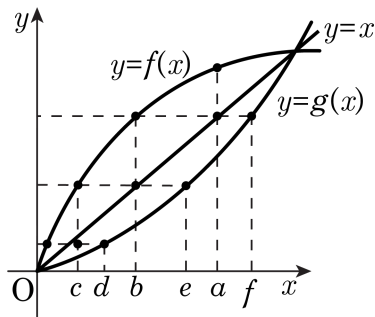
⑤ $\frac{7}{2}$

해설

$f^{-1}(2) = a$ 라 하면, $f(a) = 2$ 이므로 $2a - 3 = 2$

$$\therefore a = \frac{5}{2}$$

6. 다음 그림은 세 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$, $y = x$ 의 그래프이다. 이때, $(f \circ f \circ g)^{-1}(a)$ 의 값은?



① a

② b

③ c

④ d

⑤ e

해설

$(f \circ f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1} \circ f^{-1} \dots \dots \textcircled{\Gamma}$ 이고

$f^{-1}(a) = k$ 라 하면 $f(k) = a$ 에서 $k = b$

$\therefore f^{-1}(a) = b \dots \dots \textcircled{\text{L}}$

$f^{-1}(b) = l$ 이라 하면 $f(l) = b$ 에서 $l = c$

$\therefore f^{-1}(b) = c \dots \dots \textcircled{\text{E}}$

$g^{-1}(c) = m$ 이라 하면 $g(m) = c$ 에서 $m = d$

$\therefore g^{-1}(c) = d \dots \dots \textcircled{\text{E}}$

$\textcircled{\Gamma}, \textcircled{\text{L}}, \textcircled{\text{E}}, \textcircled{\text{E}}$ 에서

$(f \circ f \circ g)^{-1} = (g^{-1} \circ f^{-1} \circ f^{-1})(a)$

$= g^{-1}[f^{-1}\{f^{-1}(a)\}]$

$= g^{-1}\{f^{-1}(b)\} = g^{-1}(c) = d$

7. $1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x(x-1)}$ 을 계산하면?

① 1

② $\frac{1}{x}$

③ $\frac{1}{x-1}$

④ $\frac{x}{x-1}$

⑤ $\frac{x+1}{x(x-1)}$

해설

$$\begin{aligned} & 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x(x-1)} \\ &= \frac{x-1}{x} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x(x-1)} \\ &= \frac{(x-1)^2 + x}{x(x-1)} - \frac{1}{x(x-1)} \\ &= \frac{x^2 - 2x + x - 1}{x(x-1)} \\ &= \frac{x^2 - x}{x(x-1)} = \frac{x(x-1)}{x(x-1)} = 1 \end{aligned}$$

8. $\frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 4} \times \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 5x}$ 을 계산하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$(\text{준식}) = \frac{x(x-2)}{(x-2)^2} \times \frac{(x-2)(x-5)}{x(x-5)} = 1$$

9. $f : X \rightarrow Y$, $x \rightarrow f(x)$ 라 한다. X 의 임의의 두 원소를 a, b 라 할 때, 다음 중에서 f 가 일대일 함수일 조건은?

① $a = b$ 이면 $f(a) = f(b)$

② $f(a) = f(b)$ 이면 $a = b$

③ $f(a) \neq f(b)$ 이면 $a \neq b$

④ $a \neq b$ 이면 $f(a) = f(b)$

⑤ $a = b$ 이면 $f(a) \neq f(b)$

해설

일대일함수의 정의

「 $a \neq b$ 이면, $f(a) \neq f(b)$ 」의 대우

10. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에서 집합 $B = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ 로의 대응 f 중 $f(1) = a_1, f(2) = a_2$ 인 함수 f 의 개수는?

① 8 개

② 25 개

③ 64 개

④ 81 개

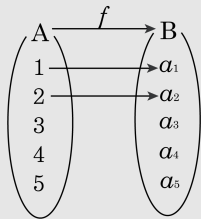
⑤ 125 개

해설

$f(1) = a_1, f(2) = a_2$ 인 함수

$f : A \rightarrow B$ 는 다음 그림에서 A 의 원소 3, 4, 5 에 B 의 원소 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 중 하나를 각각 대응시키면 된다.

따라서, 구하는 함수의 개수는 $5 \times 5 \times 5 = 125$ (개)



11. 두 함수 $f(x) = -x + a$, $g(x) = ax + b$ 에 대하여 $(f \circ g)(x) = 2x - 4$ 일 때, ab 의 값은 얼마인가?

① -2

② -3

③ -4

④ -5

⑤ -6

해설

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(ax + b)$$

$$= -(ax + b) + a = -ax + a - b \text{ 이므로 } -ax + a - b = 2x - 4$$

그런데, 이것은 x 에 대한 항등식이므로

$$a = -2, b = 2$$

$$\therefore ab = -4$$

12. 함수 $f(x) = 2x + 6$, $g(x) = ax - 1$ 에 대하여 $f \circ g = g \circ f$ 일 때, a 의 값은?

① $\frac{1}{6}$

② $\frac{5}{6}$

③ 1

④ 2

⑤ 6

해설

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= 2g(x) + 6 = 2(ax - 1) + 6 \\ &= 2ax + 4 \cdots \textcircled{\text{㉠}}\end{aligned}$$

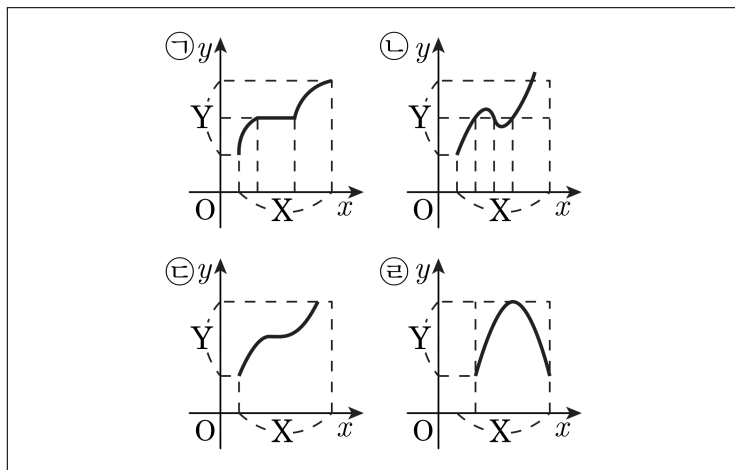
$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= af(x) - 1 = a(2x + 6) - 1 \\ &= 2ax + 6a - 1 \cdots \textcircled{\text{㉡}}\end{aligned}$$

$$\textcircled{\text{㉠}}, \textcircled{\text{㉡}} \text{에서 } 2ax + 4 = 2ax + 6a - 1$$

$$4 = 6a - 1$$

$$\therefore a = \frac{5}{6}$$

13. 함수 $f: X \rightarrow Y$ 의 그래프가 다음과 같다고 한다. 이 중에서 역함수가 존재하는 것은?



① ㉠, ㉢

② ㉡, ㉣

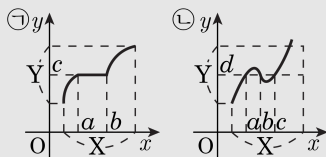
③ ㉢

④ ㉠

⑤ ㉠, ㉡, ㉣

해설

X 에서 Y 로의 일대일대응을 찾으면 된다.



㉠ : $\{x|a \leq x \leq b\}$ 에 속하는 x 의 상이 모두 c 이므로 일대일대응이 아니다.

㉡ : a, b, c 의 상이 모두 d 이므로 일대일대응이 아니다.

㉢ : ㉡의 경우와 같다.

14. $f(x) = ax + b$ ($a \neq 0$), $g(x) = x + c$ 라 할 때, $(f \circ g)(x) = 2x - 3$, $f^{-1}(3) = -2$ 가 성립한다. 상수 a, b, c 의 값을 차례대로 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 2$

▷ 정답 : $b = 7$

▷ 정답 : $c = -5$

해설

$$(f \circ g)(x) = f(x + c) = a(x + c) + b = ax + ac + b$$

$$\therefore a = 2 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$ac + b = -3 \cdots \textcircled{㉡}$$

$$f^{-1}(3) = -2 \text{ 이므로, } f(-2) = 3$$

$$\therefore -2a + b = 3 \cdots \textcircled{㉢}$$

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$$\therefore a = 2, b = 7, c = -5$$

15. 함수 $f(x)$ 의 역함수 $f^{-1}(x)$ 가 존재하고 $f(5) = -2$, $(f \circ f)(x) = x$ 일 때, $f^{-1}(5)$ 의 값은?

① -5

② -2

③ 1

④ 2

⑤ 5

해설

$(f \circ f)(x) = x$ 에서 $f = f^{-1}$

따라서 $f^{-1}(5) = f(5) = -2$

16. 함수 $f : A \rightarrow B$ 에서 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}$ 이고,
 $f(1)+f(2)+f(3)+f(4) = 1 + \sqrt{2} + 2\sqrt{3}$ 일 때, $\{f(1)\}^2 + \{f(2)\}^2 + \{f(3)\}^2 + \{f(4)\}^2$ 의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = 1 + \sqrt{2} + 2\sqrt{3}$ 이므로

$B = \{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}$ 에서 $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$ 을 사용하여 $1 + \sqrt{2} + 2\sqrt{3}$ 을 만들 수 있는 경우는 더하는 순서에 상관없이 $1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{3}$ 으로 표현된다.

이 때, 정의역 중에서 $1, \sqrt{2}$ 에 대응하는 것은 1개이고 $\sqrt{3}$ 에 대응하는 것은 2개이어야 한다.

$$\begin{aligned} & \text{따라서 } \{f(1)\}^2 + \{f(2)\}^2 + \{f(3)\}^2 + \{f(4)\}^2 \\ &= 1^2 + (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2 = 9 \end{aligned}$$

17. 실수를 원소로 갖는 집합 X 가 정의역인 두 함수 $f(x) = x^2$ 과 $g(x) = x^3 - 2x$ 가 같을 때, X 의 개수는 몇 개인가?

① 3개

② 4개

③ 7개

④ 8개

⑤ 16개

해설

두 함수의 정의역은 같으므로 $f(x) = g(x)$ 에서

$$x^2 = x^3 - 2x, x^3 - x^2 - 2x = 0$$

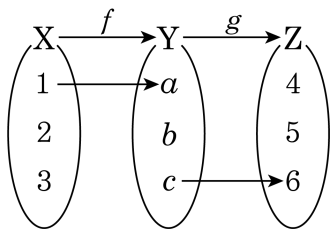
$$x(x+1)(x-2) = 0, x = -1, 0, 2$$

$$\therefore X = \{-1, 0, 2\}$$

따라서 X 의 공집합을 제외한

부분집합이 되므로 7개

18. 세 집합 $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{a, b, c\}$, $Z = \{4, 5, 6\}$ 에 대하여 일대일 대응인 함수 $f : X \rightarrow Y$ 와 $g : Y \rightarrow Z$ 가 $f(1) = a$, $g(c) = 6$, $(g \circ f)(2) = 4$ 를 만족할 때, $f(3)$ 의 값은?



① a

② b

③ c

④ b, c 모두 가능하다.

⑤ a, b, c 모두 가능하다.

해설

$$(g \circ f)(2) = g(f(2)) = 4 \cdots \textcircled{1}$$

함수 f 와 g 는 일대일 대응이므로 $g(f(2)) = 4$ 에서 $f(2) = a$ 또는 b

i) $f(2) = a$ 인 경우

$f(1) = a$ 로 정의된 조건과 모순

ii) $f(2) = b$ 인 경우

$f(1) = a, f(2) = b$ 로 성립

$$\therefore f(2) = b, f(3) = c$$

19. 정의역이 실수 전체의 집합인 함수 $f(x)$ 가 $f\left(\frac{x+4}{2}\right) = 3x + 2$ 를 만족시킨다. 이때, $f(2)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

$$f\left(\frac{x+4}{2}\right) = 3x + 2 \text{ 에서}$$

$$\frac{x+4}{2} = 2 \text{ 이면 } x = 0 \text{ 이므로}$$

$$f(2) = 3 \cdot 0 + 2 = 2$$

20. 두 함수 $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = -4x - 5$ 일 때, $(h \circ f)(x) = g(x)$ 를 만족시키는 일차함수 $h(x)$ 에 대하여 $(h \circ g)(-2)$ 의 값은 얼마인가?

① 5

② 3

③ 1

④ -3

⑤ -5

해설

$h(x) = ax + b$ 로 놓으면

$$(h \circ f)(x) = h(f(x)) = h(2x + 3)$$

$$= a(2x + 3) + b = 2ax + 3a + b$$

그런데, $(h \circ f)(x) = g(x)$ 이므로

$$2ax + 3a + b = -4x - 5,$$

$$2a = -4, 3a + b = -5$$

즉, $a = -2, b = 1$ 이므로 $h(x) = -2x + 1$

$$(h \circ g)(-2) = h(g(-2)) = h(3) = -5$$

해설

$(h \circ f)(x) = g(x)$ 에서

$h(f(x)) = g(x)$ 이고 $f(x) = 2x + 3$ 이므로

$$h(2x + 3) = g(x)$$

또한, $(h \circ g)(-2) = h(g(-2)) = h(3)$

$$h(3) = g(0) = -5$$

21. $x \neq -1$ 인 실수에서 정의된 분수함수 $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ 에 대하여 $f^2 = f \circ f$, $\dots$, $f^{n+1} = f^n \circ f$ 이 성립할 때, $f^{2005} \left(-\frac{1}{2} \right)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 정답 : 3

해설

$$f^2(x) = f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \frac{1 - \frac{1-x}{1+x}}{1 + \frac{1-x}{1+x}} = x \text{ 이므로}$$

따라서, $f^{2n}(x) = x$ 이다. (단, n 은 자연수)

$$\therefore f^{2005} \left(-\frac{1}{2} \right) = f^{2004} \left(f \left(-\frac{1}{2} \right) \right) = f \left(-\frac{1}{2} \right) = 3$$

22. 다음 보기의 함수 $y = f(x)$ 중 $f(x) = f^{-1}(x)$ 를 만족하는 것을 모두 고르면?

보기

I. $f(x) = x$

II. $f(x) = -x + 5$

III. $f(x) = -\frac{3}{x-2} + 2$

IV. $f(x) = \frac{x+4}{2x-1}$

① I, II, III

② I, II, IV

③ I, III, IV

④ II, III, IV

⑤ I, II, III, IV

해설

$f(x)$ 를 $y = x$ 에 대칭해도 $f(x)$ 가 되면

$f(x) = f^{-1}(x)$ 이다.

I. $f(x) = f^{-1}(x)$

II. $y = -x + 5 \Rightarrow x = -y + 5 \Rightarrow y = -x + 5$

III. $y = \frac{-3}{x-2} + 2 \Rightarrow x = \frac{-3}{y-2} + 2$

$$\Rightarrow y = \frac{-3}{x-2} + 2$$

IV. $y = \frac{x+4}{2x-1} \Rightarrow x = \frac{y+4}{2y-1} \Rightarrow y = \frac{x+4}{2x-1}$

$\therefore$ I, II, III, IV : $f(x) = f^{-1}(x)$

23. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & (x \geq 0) \\ x + 1 & (x < 0) \end{cases}$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, $g(5) + g(0)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

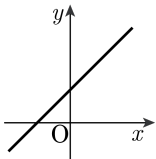
▷ 정답 : 1

해설

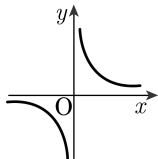
$g(5) = a$ 라 하면 $f^{-1}(5) = a$ 에서 $f(a) = 5$
그런데 $x \geq 0$ 일 때, $f(x) = x^2 + 1 \geq 1$ 이므로
 $f(a) = a^2 + 1 = 5$
 $\therefore a = 2 (\because a \geq 0) \therefore g(5) = 2$
또, $g(0) = b$ 라 하면 $f^{-1}(0) = b$ 에서 $f(b) = 0$
그런데 $x < 0$ 일 때, $f(x) = x + 1 < 1$ 이므로
 $f(b) = b + 1 = 0$
 $\therefore b = -1 \therefore g(0) = -1$
 $\therefore g(5) + g(0) = 2 - 1 = 1$

24. 다음 중 임의의 실수 x 에 대하여 $(f \circ f)(x) = x$ 를 만족하는 함수 $f(x)$ 의 그래프의 개형으로 적당한 것은?

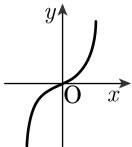
①



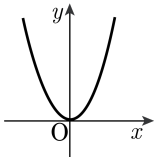
②



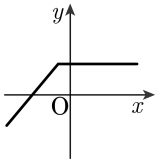
③



④



⑤



해설

$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = x$ 이므로

$f(x) = f^{-1}(x)$ 이다.

그런데 $y = f(x)$ 의 그래프와 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로

$f(x) = f^{-1}(x)$ 를 만족하려면

함수 $f(x)$ 는 일대일 대응이고

$y = f(x)$ 의 그래프는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이어야 한다.

25. $\frac{x^3 - x}{x^2 - x} + \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1} - \frac{x^2 - 2x - 3}{x + 1} \times \frac{x + 2}{x^2 - x - 6}$ 을 계산하면?

① $x^2 + x + 1$

② $\frac{x^2 + 1}{x - 1}$

③ $\frac{2x}{x^2 - 1}$

④ $x^2 - 1$

⑤ $\frac{2x - 1}{x^2 - x}$

해설

$$\begin{aligned} & \frac{x(x+1)(x-1)}{x(x-1)} + \frac{(x^2+1)(x^2-1)}{x^2-1} \\ & - \frac{(x+1)(x-3)}{x+1} \times \frac{x+2}{(x-3)(x+2)} \\ & = x + 1 + x^2 + 1 - 1 = x^2 + x + 1 \end{aligned}$$