

1. 연립부등식 $\begin{cases} ax+3 \geq -1 \\ 9x-6 \geq 3x+7 \end{cases}$ 의 해가 $x=m$ 일 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-\frac{24}{13}$

해설

$$9x-6 \geq 3x+7 \quad , \quad 6x \geq 13$$

$$x \geq \frac{13}{6}$$

$$ax+3 \geq -1 \quad , \quad ax \geq -4$$

$$x \leq -\frac{4}{a}$$

연립부등식의 해가 $x=m$ 이므로

$$\frac{13}{6} = -\frac{4}{a} \quad , \quad -13a = 24$$

$$\therefore a = -\frac{24}{13}$$

2. 부등식 $|x+3|+|x-2|<6$ 의 해가 $a < x < b$ 일 때, $a+b$ 의 값을 구하면?

① -6

② -3

③ -1

④ 2

⑤ 5

해설

i) $x < -3$

$$-x-3-x+2<6, x>-\frac{7}{2} \therefore -\frac{7}{2}<x<-3$$

ii) $-3 \leq x < 2$

$$x+3-x+2<6, \text{ 항상 성립 } \therefore -3 \leq x < 2$$

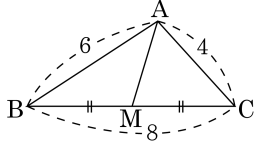
iii) $x \geq 2$

$$x+3+x-2<6, x<\frac{5}{2} \therefore 2 \leq x < \frac{5}{2}$$

i), ii), iii)에서 $-\frac{7}{2}<x<\frac{5}{2} \Leftrightarrow a < x < b$

$$\therefore a = -\frac{7}{2}, b = \frac{5}{2} \therefore a+b = -1$$

3. 다음 그림의 $\triangle ABC$ 에서 $\overline{AB} = 6$, $\overline{BC} = 8$, $\overline{AC} = 4$ 이고, $\overline{BC}$ 의 중점이 M일 때, $\overline{AM}^2$ 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

중선정리에 의하여
 $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2)$ 이므로
 $6^2 + 4^2 = 2(\overline{AM}^2 + 4^2)$
 $36 + 16 = 2\overline{AM}^2 + 32$
 $\therefore \overline{AM}^2 = 10$

4. x, y 에 대한 연립방정식 $2x + (a + 2)y - 1 = 0$, $(a - 3)x - 2y + 2 = 0$ 이 해를 갖지 않을 때, 상수 a 의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$2x + (a + 2)y - 1 = 0$, $(a - 3)x - 2y + 2 = 0$ 이 평행해야 한다.

따라서 평행할 조건을 구하면,

$$\frac{2}{a-3} = \frac{a+2}{-2} \neq -\frac{1}{2}$$

$$\frac{2}{a-3} = \frac{a+2}{-2} \text{에서}$$

$$a^2 - a - 2 = 0, (a - 2)(a + 1) = 0$$

$$\therefore a = 2 \text{ 또는 } a = -1$$

1) $a = 2$ 일 때,

$$\frac{2}{-1} = \frac{4}{-2} \neq -\frac{1}{2} \quad \therefore \text{평행}$$

2) $a = -1$ 일 때,

$$\frac{2}{-4} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2} \quad \therefore \text{일치}$$

따라서, 1), 2)에 의하여 $a = 2$

5. 두 이차방정식 $x^2 + kx + 3 = 0$, $x^2 + x + 3k = 0$ 이 공통인 실근 α 를 가질 때, $\alpha - k$ 의 값을 구하여라.

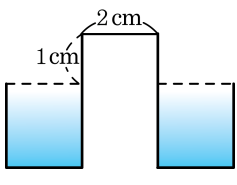
▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

공통근이 α 이므로
 $\alpha^2 + k\alpha + 3 = 0 \dots\dots\textcircled{1}$
 $\alpha^2 + \alpha + 3k = 0 \dots\dots\textcircled{2}$
 $\textcircled{1} - \textcircled{2}$ 에서 $(k - 1)\alpha - 3(k - 1) = 0$,
 $(k - 1)(\alpha - 3) = 0$
(i) $k = 1$ 인 경우 두 이차방정식이 $x^2 + x + 3 = 0$ 으로 일치하여
공통근은 갖지만 실근이 아니므로 부적합하다.
(ii) $\alpha = 3$ 인 경우 $9 + 3k + 3 = 0 \therefore k = -4$
 $\therefore \alpha - k = 7$

6. 폭이 100 cm 인 긴 양철판을 구부려서 두 줄기로 물이 흘러가도록 하였다. 직사각형 단면이 다음 그림과 같이 대칭인 모양으로 물이 가장 많이 흘러갈 수 있도록 했을 때, 물이 흘러가는 단면 중 한 개 단면의 최대 넓이는 몇 cm^2 인가? (단, 아래 그림의 실선은 양철판을 나타낸다.)



- ① 125 cm^2 ② 288 cm^2 ③ 350 cm^2
 ④ 420 cm^2 ⑤ 120 cm^2

해설

직사각형 단면의 세로의 길이를 a , 가로 길이를 b 라 하면
 총길이는 $a + b + a + 1 + 2 + a + 1 + b + a = 100$ 에서
 $4a + 2b = 96$
 $\therefore 2a + b = 48$ 이므로 $b = 48 - 2a$
 한 개 단면의 넓이는 ab 이므로
 $a(48 - 2a) = -2a^2 + 48a$
 $= -2(a^2 - 24a)$
 $= -2(a^2 + 24a + 144 - 144)$
 $= -2(a - 12)^2 + 288$
 따라서 $a = 12$ 일 때 최대 넓이 288 cm^2

7. x 에 대한 이차방정식 $x^2 - 2(a+2)x + 2a^2 + 6 = 0$ 의 두 근이 정수일 때, 정수 a 의 값을 구하면?

① -1

② 3

③ -1, -3

④ 1, 3

⑤ -3, 1

해설

정수근을 가지려면 일단은 $D \geq 0$ 이어야 하므로 $D/4 = (a+2)^2 - 2a^2 - 6 \geq 0$ 에서 $2 - \sqrt{2} \leq a \leq 2 + \sqrt{2} \dots \textcircled{1}$

그런데 a 는 정수이므로 $\textcircled{1}$ 에서 $a = 1, 2, 3$

i) $a = 1$ 일 때 $x^2 - 6x + 8 = 0$ 의 두 근은

$x = 2, 4$ (조건을 만족)

ii) $a = 2$ 일 때 $x^2 - 8x + 14 = 0$ 의 두 근은

$x = 4 \pm \sqrt{2}$ (조건에 위배)

iii) $a = 3$ 일 때 $x^2 - 10x + 24 = 0$ 의 두 근은

$x = 4, 6$ (조건을 만족)

i), ii), iii)에서 $a = 1, 3$

8. 방정식 $x^2 + 2y^2 + 2xy - 4x - 10y + 13 = 0$ 을 만족시키는 실수 x, y 의 합 $x + y$ 의 값은?

- ① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

주어진 방정식을 x 에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$x^2 + 2(y - 2)x + 2y^2 - 10y + 13 = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

이 때, x 가 실수이므로 판별식 $\frac{D}{4} \geq 0$ 이다.

$$\frac{D}{4} = (y - 2)^2 - (2y^2 - 10y + 13) \geq 0$$

$$-y^2 + 6y - 9 \geq 0, \quad y^2 - 6y + 9 \leq 0$$

$$(y - 3)^2 \leq 0 \quad y \text{ 가 실수이므로 } y - 3 = 0$$

$$\therefore y = 3 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \text{을 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } x^2 + 2x + 1 = 0, \quad (x + 1)^2 = 0$$

$$\therefore x = -1$$

$$\therefore x + y = -1 + 3 = 2$$

9. x 에 대한 이차방정식 $x^2 - kx + k + 3 = 0$ 의 두 근이 모두 정수일 때, 상수 k 의 값의 합은?

① 0 ② 2 ③ 4 ④ 6 ⑤ 8

해설

$x^2 - kx + k + 3 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하자

$$\alpha + \beta = k, \alpha\beta = k + 3 \rightarrow \alpha + \beta + 3 = \alpha\beta$$

$$\alpha\beta - \alpha - \beta = 3$$

$(\alpha - 1)(\beta - 1) = 4$ α, β 는 정수이므로

$$1 \times 4 \Rightarrow \alpha = 2, \beta = 5, \quad k = 7$$

$$2 \times 2 \Rightarrow \alpha = 3, \beta = 3, \quad k = 6$$

$$-1 \times -4 \Rightarrow \alpha = 0, \beta = -3, \quad k = -3$$

$$-2 \times -2 \Rightarrow \alpha = -1, \beta = -1, \quad k = -2$$

$$\therefore 7 + 6 - 3 - 2 = 8$$

10. $A : 0.4 - 0.25x \leq 1.5x - 1.35$, $B : -\frac{1-2x}{4} < \frac{2-x}{2} - \frac{x-1}{3}$ 가 있다. A 에서 B 를 제외한 수는?

- ① $x < 1$
- ② $x \geq 1$
- ③ $x < \frac{19}{16}$
- ④ $x \leq \frac{19}{16}$
- ⑤ $x \geq \frac{19}{16}$

해설

$0.4 - 0.25x \leq 1.5x - 1.35$ 의 양변에 100을 곱하면
 $40 - 25x \leq 150x - 135$
 $175 \leq 175x$
 $1 \leq x$
 $A : 1 \leq x$
 $-\frac{1-2x}{4} < \frac{2-x}{2} - \frac{x-1}{3}$ 의 양변에 12를 곱하면
 $-3(1-2x) < 6(2-x) - 4(x-1)$
 $-3+6x < 12-6x-4x+4$
 $x < \frac{19}{16}$
 $B : x < \frac{19}{16}$ 이므로
 A 에서 B 를 제외한 수는 $x \geq \frac{19}{16}$ 이다.

11. 15%의 소금물 200g이 있을 때, 물 x g을 증발시켜서 30% 이상 60% 이하의 소금물을 만들려고 한다. x 의 범위를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $100 \leq x \leq 150$

해설

15%의 소금물 200g의 소금의 양은 $\frac{15}{100} \times 200 = 30$ (g)이다.

따라서 물 x g을 뺏을 때의 농도를 나타내면 $\frac{30}{200-x} \times 100$ 이다.

이 값이 30% 이상 60% 이하 이므로, $30 \leq \frac{30}{200-x} \times 100 \leq 60$ 이고,

이를 연립방정식으로 나타내면
$$\begin{cases} 30 \leq \frac{30}{200-x} \times 100 \\ \frac{30}{200-x} \times 100 \leq 60 \end{cases}$$
이다.

간단히 나타내면
$$\begin{cases} x \geq 100 \\ x \leq 150 \end{cases}$$
이다.

따라서 증발시켜야 하는 물의 양 x 의 범위는 $100 \leq x \leq 150$ 이다.

12. 부등식 $a(x^2 - 2x + 1) > 2(x^2 - 2x - 2)$ 를 만족하는 실수 x 가 존재할 때, 상수 a 의 범위는?

① $a > 2$

② $a \geq 2$

③ $a < 2$

④ a 는 모든 실수

⑤ $a < \pm 2$

해설

$a = 2$ 일 때, $6 > 0$ 이므로 x 는 모든 실수

$a \neq 2$ 일 때,

$(a - 2)x^2 - 2(a - 2)x + a + 4 = 0 \cdots \textcircled{1}$ 에서

$\frac{D}{4} = (a - 2)^2 - (a - 2)(a + 4) = -6(a - 2)$ 이므로

i) $a > 2$ 이면, x 는 모든 실수

ii) $a < 2$ 이면, $\frac{D}{4} > 0$ 이므로 $\textcircled{1}$ 의 근을

$\alpha, \beta (\alpha < \beta)$ 라 하면

부등식의 해는 $\alpha < x < \beta$ 이므로 x 값이 존재한다.

$\therefore a$ 는 모든 실수

13. 모든 실수 x 에 대하여 $(|a|+a)x \geq a^2+a-20$ 이 성립할 때, 정수 a 의 개수를 구하면?

- ① 9개 ② 6개 ③ 5개 ④ 4개 ⑤ 3개

해설

$(|a|+a)x \geq a^2+a-20$ 에서

a 의 부호에 따라 범위를 나누면,

① $a < 0 : |a| = -a$

$0 \cdot x \geq a^2+a-20, (a+5)(a-4) \leq 0$ 에서

$-5 \leq a \leq 4$

$\therefore -5 \leq a < 0$

② $a = 0 : 0 \cdot x \geq -20$ 이므로, 항상 성립한다.

$\therefore a = 0$

③ $a > 0 : |a| = a$

$2a \cdot x \geq a^2+a-20, x \geq \frac{1}{2a}(a^2+a-20)$

모든 x 에 대해서 위 부등식이 성립할 수 없다.

$\therefore$ ①과 ②를 동시에 만족하는 a 의 범위는 $-5 \leq a \leq 0$,

따라서 정수 a 의 개수는 6개

14. 이차부등식 $ax^2 + (a^2 - 1)x + b > 0$ 의 해가 $|x| < |a|$ 과 일치하도록 실수 a, b 의 값을 정할 때, $a - b$ 의 값은 ?

① -1

② -2

③ 0

④ 2

⑤ 1

해설

$$|x| < |a| \Leftrightarrow x^2 < a^2 \Leftrightarrow x^2 - a^2 < 0 \cdots \textcircled{1}$$

$$\Leftrightarrow ax^2 + (a^2 - 1)x + b > 0 \cdots \textcircled{2}$$

$$\therefore a < 0, a^2 - 1 = 0$$

$$\therefore a = -1$$

$$a = -1 \text{ 일 때 } \textcircled{1} \text{ 은 } x^2 - 1 < 0, \textcircled{2} \text{ 는 } -x^2 + b > 0$$

$$\therefore b = 1 \therefore a - b = -2$$

15. 이차방정식 $(x-1)(x-3)+m(x-k)=0$ 이 모든 실수 m 에 대하여 항상 서로 다른 두 실근을 가지도록 k 의 값의 범위를 정하면?

- ① $0 < k < 1$ ② $1 < k < 3$ ③ $-1 < k < 1$
④ $-1 < k < 2$ ⑤ $-1 < k < 3$

해설

$x^2 + (m-4)x + 3 - mk = 0$ 은
서로 다른 두 실근을 가지므로
 $D = (m-4)^2 - 12 + 4mk > 0$
이것을 정리하면
 $m^2 + 4(k-2)m + 4 > 0 \cdots (i)$
(i)는 모든 실수 m 에 대하여 성립해야 하므로
 $4(k-2)^2 - 4 < 0$
 $\therefore (k-1)(k-3) < 0$
 $\therefore 1 < k < 3$

16. 두 부등식 $x^2 - x - 2 > 0$, $x^2 - (a - 3)x - 3a < 0$ 를 동시에 만족하는 정수가 -2 뿐일 때, a 의 값의 범위를 구하면 $m < a \leq n$ 이다. mn 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

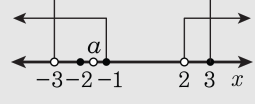
▷ 정답 : -6

해설

$$x^2 - x - 2 > 0 \text{에서 } x < -1, x > 2$$

$$x^2 - (a - 3)x - 3a < 0 \text{에서}$$

$$(x + 3)(x - a) < 0$$



그림에서와 같이 동시에 만족하는 정수값이 -2 뿐이려면 $-2 < a \leq 3$ 이다.

$$\therefore -2 < a \leq 3$$

17. 모든 내각의 크기가 180° 보다 작은 육각형의 각 변의 길이가 10, 2, 2, 1, $2x$, y 일 때, $x^2 + y^2$ 의 최솟값은? (단, x , y 는 자연수)

① 2

② 6

③ 8

④ 9

⑤ 13

해설

다각형의 결정조건에 의해 $2x + y > 5$

x , y 는 자연수이므로,

$x = 2$, $y = 2$ 일 때 최소가 된다.

$$\therefore x^2 + y^2 = 8$$

18. 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 한 근은 -1 과 0 사이에 있고, 다른 근은 0 과 2 사이에 있을 때 정수 a, b 에 대하여, $a + b$ 의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$f(x) = x^2 + ax + b$ 라고 놓을 때

$$\begin{cases} f(-1) = 1 - a + b > 0 & \dots \textcircled{1} \\ f(0) = b < 0 & \dots \textcircled{2} \\ f(2) = 4 + 2a + b > 0 & \dots \textcircled{3} \end{cases}$$

$\textcircled{1} \times 2 + \textcircled{3}$ 하면 $6 + 3b > 0$

$\therefore b > -2$

이것과 $\textcircled{2}$ 에서 $-2 < b < 0$

$\therefore b = -1$ ($\because b$ 는 정수)

이 값을 $\textcircled{1}, \textcircled{3}$ 에 대입하면

$1 - a - 1 > 0, 4 + 2a - 1 > 0$

$\therefore -\frac{3}{2} < a < 0$

$\therefore a = -1$ ($\because a$ 는 정수)

$\therefore a = -1, b = -1, a + b = -2$

19. 이차방정식 $x^2 - (p+1)x + 2p-1 = 0$ 의 두 근 중 한 근은 -1보다 작고, 다른 한 근은 1보다 크도록 실수 p 의 범위를 정하면?

① $p > -\frac{1}{3}$
④ $p < -\frac{1}{3}$

② $p > 1$
⑤ $p < 1$

③ $-\frac{1}{3} < p < 1$

해설

$f(x) = x^2 - (p+1)x + 2p-1$ 로 놓으면

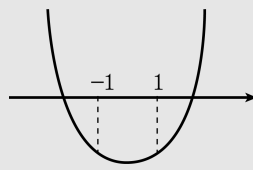
i) $f(-1) = 1 + p + 1 + 2p - 1 = 3p + 1 < 0$

$\therefore p < -\frac{1}{3}$

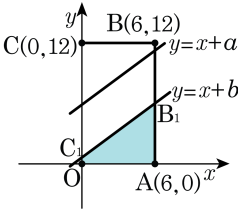
ii) $f(1) = 1 - p - 1 + 2p - 1 = p - 1 < 0$

$\therefore p < 1$

i) ii)에서 $p < -\frac{1}{3}$



20. 네 점 $O(0,0)$, $A(6,0)$, $B(6,12)$, $C(0,12)$ 를 꼭지점으로 하는 사각형 $OABC$ 가 있다. 그림과 같이 두 직선 $y = x + a$, $y = x + b$ 가 사각형 $OABC$ 의 넓이를 삼등분할 때, ab 의 값은?



- ① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

사각형 $OABC$ 의 넓이가 72이므로
사각형 OAB_1C_1 의 넓이는 24이다.
 $\frac{1}{2}(b + 6 + b) \times 6 = 24$ 이므로 $b = 1$
같은 방법으로 $a = 5$
 $\therefore ab = 5$

21. 두 직선 $y = ax$ 와 $y = bx$ 가 서로 수직이고, 직선 $x = 2$ 와 만나는 두 점을 P, Q라 할 때, P, Q의 중점이 $\left(2, \frac{3}{2}\right)$ 이다. 이때, $|a - b|$ 의 값은?
(단, $a > 0, b < 0$)

- ① 1 ② 2 ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 4

해설

$P(2, 2a), Q(2, 2b)$
 $\therefore$ P, Q의 중점 : $\left(\frac{2+2}{2}, \frac{2a+2b}{2}\right) = \left(2, \frac{3}{2}\right)$
 $\Rightarrow a + b = \frac{3}{2} \quad \cdots \text{㉠}$
 $y = ax$ 와 $y = bx$ 가 서로 수직이므로
 $a \times b = -1 \quad \cdots \text{㉡}$
 $\therefore (a + b)^2 = (a - b)^2 + 4ab$ 이므로
 $(a - b)^2 = \frac{9}{4} + 4$
 $\Rightarrow a - b = \frac{5}{2} \quad (\because a > 0, b < 0)$

22. 세 직선 $\begin{cases} x+2y=5 \\ 2x-3y=-4 \\ ax+y=0 \end{cases}$ 이 삼각형을 만들지 못할 때, 모든 상수 a

의 값을 구하면?

- ① $a=2$ 또는 $a=\frac{1}{2}$ 또는 $a=-\frac{2}{3}$
- ② $a=2$ 또는 $a=-\frac{1}{2}$ 또는 $a=-\frac{2}{3}$
- ③ $a=2$ 또는 $a=\frac{1}{2}$ 또는 $a=\frac{2}{3}$
- ④ $a=-2$ 또는 $a=\frac{1}{2}$ 또는 $a=-\frac{2}{3}$
- ⑤ $a=-2$ 또는 $a=\frac{1}{2}$ 또는 $a=\frac{2}{3}$

해설

$$\begin{cases} x+2y=5 & \cdots \textcircled{A} \\ 2x-3y=-4 & \cdots \textcircled{B} \\ ax+y=0 & \cdots \textcircled{C} \end{cases}$$

에서 $\textcircled{A}$, $\textcircled{B}$ 의 교점은 $(1, 2)$ 이다.

(i) $\textcircled{C}$ 이 점 $(1, 2)$ 를 지날 때, $a+2=0$ 에서 $a=-2$

(ii) $\textcircled{C}$ 이 $\textcircled{A}$ 과 평행할 때, $a=\frac{1}{2}$

(iii) $\textcircled{C}$ 이 $\textcircled{B}$ 과 평행할 때, $a=-\frac{2}{3}$

이상에서 구하는 모든 상수 a 의 값은

$$a=-2 \text{ 또는 } a=\frac{1}{2}$$

$$\text{또는 } a=-\frac{2}{3} \text{ 이다.}$$

23. 점 $(1, -1)$ 에서 직선 $ax + by = 0 (a \neq 0, b \neq 0)$ 까지의 거리가 $\sqrt{2}$ 일 때, 상수 a, b 의 관계를 바르게 설명한 것은?

- ① $a - b = 0$
- ② $a - b = \sqrt{2}$
- ③ $a + b = 0$
- ④ $ab = 0$
- ⑤ $ab = \sqrt{2}$

해설

$$\frac{|a \times 1 + b \times (-1)|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|a - b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sqrt{2}$$
$$|a - b| = \sqrt{2} \sqrt{a^2 + b^2}$$

양변을 제곱하면 $a^2 - 2ab + b^2 = 2a^2 + 2b^2$

$$a^2 + 2ab + b^2 = 0, (a + b)^2 = 0$$

따라서 $a + b = 0$

24. 원점 O 와 점 $A(10, 0)$ 으로부터 직선 $3x + 4y + 30 = 0$ 에 내린 수선을 각각 $\overline{OP}$, $\overline{AQ}$ 라 할 때, 사다리꼴 $OPQA$ 의 넓이는?

- ① 64
- ② 72
- ③ 80
- ④ 81
- ⑤ 90

해설

$$\overline{OP} = \frac{|30|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 6$$
$$\overline{AQ} = \frac{|30 + 30|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 12$$
$$\overline{PQ} = \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{AH}^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$$

따라서 사다리꼴 $OPQA$ 의 넓이를 S 라 하면,

$$S = \frac{1}{2} \cdot (\overline{OP} + \overline{AQ}) \cdot \overline{PQ} = \frac{1}{2} \cdot (6 + 12) \cdot 8 = 72$$

25. 중심이 직선 $2x+y=0$ 위에 있고, 두 점 $(3, 0)$, $(0, 1)$ 을 지나는 원의 방정식은 ?

- ① $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 6 = 0$
- ② $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 6 = 0$
- ③ $5x^2 + 5y^2 - 8x + 16y - 21 = 0$
- ④ $5x^2 + 5y^2 + 8x - 16y - 21 = 0$
- ⑤ $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 12 = 0$

해설

구하는 원의 중심이 직선 $2x + y = 0$ 위에 있으므로 중심을 $(a, -2a)$ 라 할 수 있다.

$$(x-a)^2 + (y+2a)^2 = r^2$$

점 $(3, 0)$ 을 지나므로,

$$(3-a)^2 + (2a)^2 = r^2 \dots \textcircled{1}$$

또, 점 $(0, 1)$ 을 지나므로,

$$a^2 + (1+2a)^2 = r^2 \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } a = \frac{4}{5}, r^2 = \frac{37}{5}$$

$$\therefore \left(x - \frac{4}{5}\right)^2 + \left(y + \frac{8}{5}\right)^2 = \frac{37}{5}$$

$$\text{정리하면 } 5x^2 + 5y^2 - 8x + 16y - 21 = 0$$

26. x, y, z 에 대한 다음 연립방정식의 근의 곱이 음의 정수이고, 합이 양의 정수일 때, $x + y + z$ 의 최댓값을 구하면?

$$\begin{cases} 2x - y + z = a & \cdots \cdots \textcircled{㉠} \\ x + 2y + 2z = 3a - 11 & \cdots \cdots \textcircled{㉡} \\ 3x - y + 2z = 2a - 2 & \cdots \cdots \textcircled{㉢} \end{cases}$$

- ① 2 ② -2 ③ 3 ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ -3

해설

$\textcircled{㉠} \times 2 - \textcircled{㉡}$ 에서 $3x - 4y = -a + 11$
 $\textcircled{㉡} - \textcircled{㉢}$ 에서 $-2x + 3y = a - 9$
 $\therefore x = a - 3, y = a - 5,$
 $\textcircled{㉠}$ 에서 $z = 1$
 $xyz = (a - 3)(a - 5) \cdot 1 < 0$
 $\therefore 3 < a < 5 \cdots \cdots \textcircled{㉤}$
 $x + y + z = (a - 3) + (a - 5) + 1 = 2a - 7 > 0$
 $\therefore a > \frac{7}{2} \cdots \cdots \textcircled{㉥}$
 $\textcircled{㉤}, \textcircled{㉥}$ 에서 $\frac{7}{2} < a < 5 \cdots \cdots \textcircled{㉦}$
그런데 $x + y + z$ 는 정수이므로 $2a - 7$ 은 정수이고 $2a$ 도 정수이다.
 $\textcircled{㉦}$ 에서 $7 < 2a < 10$
 $\therefore 2a = 8$ 또는 $9 (\because 2a$ 는 정수)
 $\therefore a = 4$ 또는 $\frac{9}{2}$
 $\therefore x = 1, y = -1, z = 1$ 또는 $x = \frac{3}{2}, y = -\frac{1}{2}, z = 1$
 $\therefore x + y + z = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} + 1 = 2$

27. 연립부등식

$$\begin{cases} x+2y \geq a+2 \\ y+2z \geq 2(a+4) \\ z+2x \geq a+5 \end{cases}$$

의 해 x, y, z 가 $x+y+z=9$ 를 만족할 때, a 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$\begin{cases} x+2y \geq a+2 \\ y+2z \geq 2(a+4) \\ z+2x \geq a+5 \end{cases}$$

위 부등식을 변변 더하면 $3(x+y+z) \geq 4a+15$

$x+y+z=9$ 이므로 $27 \geq 4a+15$

$\therefore a \leq 3$

따라서 a 의 최댓값은 3 이다.

28. 관희는 집에서 김밥을 50개 만들었다. 아직 앞으로 10개를 더 만들 수 있는 재료가 남아있는 데, 얼마큼을 더 만들지는 모르겠다고 한다. 김밥은 5개가 들어가는 도시락과 8개가 들어가는 도시락에 나누어 담을 생각이고, 도시락의 수는 10개로 하려고 한다. 김밥이 8개가 들어가는 도시락의 최소의 개수와 최대의 개수를 순서대로 나열한 것으로 옳은 것은?

- ① 0개 , 1개
- ② 0개, 2개
- ③ 1개, 2개
- ④ 0개, 3개
- ⑤ 2개, 3개

해설

8개가 들어가는 도시락의 수를 x 개라고 두면 5개가 들어가는 도시락의 수는 $(10 - x)$ 개이다. 이를 이용하여 김밥의 개수를 식으로 나타내면 $8x + 5(10 - x)$ 개이다. 김밥의 개수는 최소 50개, 최대 60개가 될 것이므로, $50 \leq 8x + 5(10 - x) \leq 60$ 이고 연

립방정식으로 나타내면, $\begin{cases} 60 \geq 8x + 5(10 - x) \\ 8x + 5(10 - x) \geq 50 \end{cases}$ 이다. 간단히

하면 $\begin{cases} x \leq \frac{10}{3} \\ x \geq 0 \end{cases}$ 이다. x 의 범위를 나타내면 $0 \leq x \leq \frac{10}{3}$ 이다.

따라서 김밥이 8개 들어가는 도시락의 수는 최소 0개, 최대 3개이다.

29. 길이 3인 선분 AB의 양 끝점 A, B가 각각 x 축, y 축 위를 움직일 때, 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점 P의 자취를 구하면?

- ① $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$
- ② $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$
- ③ $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$
- ④ $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$
- ⑤ $x^2 + 3y^2 = 6$

해설

A(a , 0), B(0, b), P(x , y)라 하면

$\overline{AB} = 3$ 이므로 $\sqrt{a^2 + b^2} = 3$

$a^2 + b^2 = 9 \cdots \text{㉠}$

P(x , y)는 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점이므로 $x = \frac{a}{3}, y = \frac{2b}{3}$

$\therefore a = 3x, b = \frac{3y}{2} \cdots \text{㉡}$

㉡를 ㉠에 대입하면 $9x^2 + \frac{9}{4}y^2 = 9$

$\therefore x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$

30. xy 평면 위의 세 개의 직선 $l_1 : x - y + 2 = 0, l_2 : x + y - 14 = 0, l_3 : 7x - y - 10 = 0$ 으로 둘러싸인 삼각형에 내접하는 원의 중심이 (a, b) , 반지름이 r 일 때, $a + b + r^2$ 의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

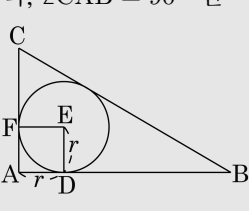
해설

세 직선의 교점을 각각 A, B, C 라 하자. 세 직선 중 두 개의 직선을 각각 연결하여 세 점의 좌표를 구한다.

$$A = (6, 8) \quad B = (2, 4) \quad C = (3, 11)$$

$$\overline{AB} = 4\sqrt{2}, \overline{BC} = 5\sqrt{2}, \overline{CA} = 3\sqrt{2}$$

즉, $\angle CAB = 90^\circ$ 인 직각 삼각형이다.



$$\Rightarrow 3\sqrt{2} - r + 4\sqrt{2} - r = 5\sqrt{2} \therefore r = \sqrt{2}$$

$\therefore$ 점 D는 $\overline{AB}$ 의 1 : 3 의 내분점이므로,

$$D = \left(\frac{2+18}{4}, \frac{4+24}{4} \right) = (5, 7)$$

점 F 는 $\overline{AC}$ 의 1 : 2 의 내분점이므로,

$$F = \left(\frac{3+12}{3}, \frac{11+16}{3} \right) = (5, 9)$$

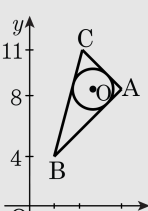
$\square ADEF$ 는 정사각형이므로 $\overline{AF} \parallel \overline{DE}$ 이다.

점 A 에서 점 F 로의 이동이 x 축으로 -1 , y 축으로 $+1$ 만큼 평행이동이고,

점 D 에서 점 E 로의 이동도 마찬가지이다.

$$\therefore E = (5-1, 7+1) = (4, 8) \Rightarrow a+b+r^2 = 4+8+(\sqrt{2})^2 = 14$$

해설



직선들의 세 교점을 각각 A, B, C 라고 하고 이들의 좌표를 구해보면 A(6,8), B(2,4), C(3,11)

원의 중심의 좌표 O(a, b) 이므로

$$2 < a < 6, 4 < b < 11 \cdots \textcircled{1}$$

원의 중심으로부터 각 직선에 이르는 거리는 같으므로

$$\frac{|a-b+2|}{\sqrt{2}} = \frac{|a+b-14|}{\sqrt{2}} = \frac{|7a-b-10|}{5\sqrt{2}} = r \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $\textcircled{1}$ 의 조건을 만족시키는 a, b 의 해는 $a = 4, b = 8$ 이고

$$\text{다시 } \textcircled{2} \text{에 대입하면, } r = \sqrt{2}, \therefore a+b+r^2 = 14$$

31. 한 점 $P(a, b)$ 에서 두 원 $(x-4)^2+(y+1)^2=4$ 와 $(x-2)^2+(y-2)^2=9$ 에 그은 각각의 접선과 두 원과의 접점을 A, B 라 할 때, $\overline{PA} = \overline{PB}$ 인 점 $P(a, b)$ 의 자취를 구하면?

- ① $2a-3b-7=0$
- ② $2a-3b+7=0$
- ③ $a^2+b^2=3$
- ④ $a^2+b^2=4$
- ⑤ $a^2+b^2=5$

해설

$(x-4)^2+(y+1)^2=4, (x-2)^2+(y-2)^2=9$
문제의 조건에서
 $\overline{PA} = \overline{PB}$ 이므로 $(\overline{PA})^2 = (\overline{PB})^2$
 $\Rightarrow (\overline{PC_1})^2 - r_1^2 = (\overline{PC_2})^2 - r_2^2$

원의 중심 $C_1 = (4, -1), C_2 = (2, 2)$,
반지름 $r_1 = 2, r_2 = 3$
 $\therefore (a-4)^2 + (b+1)^2 - 4 = (a-2)^2 + (b-2)^2 - 9$
 $\therefore$ 위를 정리하면 $2a-3b-7=0$

32. 2개의 원 $x^2 + y^2 = 1$, $(x - 4)^2 + y^2 = 4$ 의 공통접선의 기울기를 구하면 ?

① $\pm \frac{3\sqrt{7}}{7}, \pm \frac{\sqrt{15}}{15}$
③ $\pm \frac{3\sqrt{7}}{4}, \pm \frac{\sqrt{15}}{8}$
⑤ $\pm \frac{3\sqrt{7}}{8}, \pm \frac{\sqrt{15}}{12}$

② $\pm \frac{3\sqrt{7}}{2}, \pm \frac{\sqrt{15}}{5}$
④ $\pm \frac{3\sqrt{7}}{5}, \pm \frac{\sqrt{15}}{10}$

해설

$x^2 + y^2 = 1 \dots\dots ①$

$(x - 4)^2 + y^2 = 4 \dots\dots ②$

공통접선을 $y = mx + n \dots\dots ③$ 이라 하면

①의 중심과 ③과의 거리는 1이고,

②의 중심과 ③과의 거리는 2이므로

$\frac{|n|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = 1$ 이고

$\frac{|4m + n|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = 2$

$\Rightarrow m^2 + 1 = n^2 \dots\dots ④$

$4(m^2 + 1) = (4m + n)^2 \dots ⑤$

④를 ⑤에 대입하여 인수분해하면

$(4m + 3n)(4m - n) = 0$

$n = -\frac{4}{3}m$ 에서 $m = \pm \frac{3\sqrt{7}}{7}$

$n = 4m$ 에서 $m = \pm \frac{\sqrt{15}}{15}$

$\therefore m = \pm \frac{3\sqrt{7}}{7}, \pm \frac{\sqrt{15}}{15}$

33. 원 $x^2 + (y - 1)^2 = 2$ 의 x 축의 위에 있는 부분과 그 부분을 x 축에 대하여 대칭 이동하여 생기는 도형으로 둘러싸인 부분의 넓이는?
- ① $\pi + 1$ ② $\pi + 2$ ③ $3\pi + 1$
④ $3\pi + 2$ ⑤ $3\pi + 4$

해설

(구하는 넓이)

$$= \left\{ \pi \times (\sqrt{2})^2 \times \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} \right\} \times 2$$
$$= 3\pi + 2$$