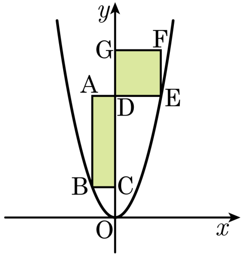
1. 다음 그림에서 포물선은 $y=2x^2$ 이고, 직사각형 ABCD 의 넓이와 정사각형 DEFG 의 넓이는 같다. $\overline{\mathrm{DE}}=2\overline{\mathrm{AD}}$ 일 때, 점 E 의 x 좌표값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : $\dfrac{4}{3}$

해설

점 E 의 x 좌표값을 p 라 하면 $\overline{\mathrm{DE}}=2\overline{\mathrm{AD}}=p$ 이다.

$\square\mathrm{ABCD}=\square\mathrm{DEFG}$ 에서 $\overline{\mathrm{AD}}\times\overline{\mathrm{CD}}=\overline{\mathrm{DE}}^2$,

$\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{DE}}\times\overline{\mathrm{CD}}=\overline{\mathrm{DE}}^2$

$\therefore\ \overline{\mathrm{DE}}=\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{CD}}$, $\overline{\mathrm{CD}}=2p\quad\cdots$ ㉠

또, $\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{AD}}=\dfrac{p}{2}$ 이므로 점 $\mathrm{B}\left(-\dfrac{p}{2},\ \dfrac{p^2}{2}\right)$, $\overline{\mathrm{OC}}=\dfrac{p^2}{2}$,

$\overline{\mathrm{DE}}=p$ 에서 점 $\mathrm{E}(p,\ 2p^2)$, $\overline{\mathrm{OD}}=2p^2$

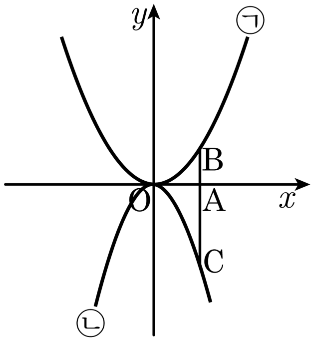
$\therefore\ \overline{\mathrm{CD}}=\overline{\mathrm{OD}}-\overline{\mathrm{OC}}=2p^2-\dfrac{p^2}{2}=\dfrac{3}{2}p^2\quad\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $\dfrac{3}{2}p^2=2p$, $p(3p-4)=0$

$\therefore\ p=\dfrac{4}{3}(\because\ p>0)$

따라서 점 E 의 x 좌표값은 $\dfrac{4}{3}$ 이다.

2. 그림과 같이 2 개의 포물선 $y=\frac{1}{2}x^2$ $\cdots$㉠ , $y=-x^2$ $\cdots$㉡ 이 있다. 점 $A(a,\ 0)$ 을 지나며, x 축에 수직인 직선이 포물선 ㉠ 과 만나는 점을 B , 포물선 ㉡과 만나는 점을 C 라 한다. $\overline{\mathrm{BC}}=\frac{4}{3}$ 일 때, a 의 값을 구하면?



① $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ② $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ③ $\sqrt{2}$ ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{3}$

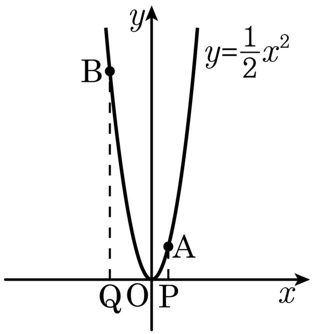
해설

$\mathrm{B}\left(a,\ \frac{1}{2}a^2\right),\ \mathrm{C}(a,\ -a^2)$

$\overline{\mathrm{BC}}=\frac{1}{2}a^2-(-a^2)=\frac{3}{2}a^2=\frac{4}{3}$

$\therefore a=\frac{2\sqrt{2}}{3}(\because a>0)$

3. 이차함수 $y = \dfrac{1}{2}x^2$ 의 그래프 위의 두 점 A, B 에 대하여 A 의 좌표는 $(4, 8)$ 이고, B 의 x좌표는 음수이다. 점 A, B 에서 각각 x축에 수선 $\overline{\mathrm{AP}}$, $\overline{\mathrm{BQ}}$를 그으면 $\overline{\mathrm{AP}} : \overline{\mathrm{BQ}} = 4 : 25$가 된다. 이 때, $\overline{\mathrm{PQ}}$의 길이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$\overline{\mathrm{AP}} : \overline{\mathrm{BQ}} = 4 : 25$에서 점 A 의 y좌표는

$4 : 25 = 8 : y$

$\therefore y = 50$ 따라서, 점 B 의 y좌표는 50 이다.

$y = \dfrac{1}{2}x^2$ 에 $y = 50$을 대입하면 $50 = \dfrac{1}{2}x^2$, $x^2 = 100 x < 0$ 이므로

$x = -10$ 이 되고 점 B 의 x좌표는 -10 이다.

따라서 $\overline{\mathrm{QO}} = 10$, $\overline{\mathrm{PO}} = 4$ 이므로 $\overline{\mathrm{PQ}} = 14$ 이다.

4. 이차함수 $y = x^2 - 4x + 5$과 $y = a(x-1)^2 + b$의 그래프가 서로의 꼭짓점을 지날 때, a, b의 값을 각각 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = -1$

▷ 정답 : $b = 2$

해설

$y = x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1$의 꼭짓점은 $(2,\ 1)$

$y = a(x-1)^2 + b$의 꼭짓점은 $(1,\ b)$

$(1,\ b)$를 $y = x^2 - 4x + 5$에 대입하면 $b = 2$

$(2,\ 1)$을 $y = a(x-1)^2 + b$에 대입하면 $a = -1$

$\therefore\ a = -1,\ b = 2$

5. 이차함수 $y = (x+4)^2$, $y = (x-1)^2$ 의 그래프의 교점에서 x축으로 평행한 선분을 그었을 때, 두 그래프와 만나는 교점을 각각 A, B라 하자. 이때 선분 AB의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

두 이차함수의 그래프의 교점에서 x축으로 평행한 선분을 그었을 때, 두 그래프와 만나는 교점 사이의 거리는 두 그래프의 꼭짓점 사이의 거리의 2배와 같다.

$(-4,\ 0)$과 $(1,\ 0)$ 사이의 거리$= 5$

따라서 선분 AB의 길이는 $5 \times 2 = 10$이다.

6. 점 $(2,\ 10)$을 지나고 꼭짓점의 좌표가 $(-1,\ -8)$인 이차함수의 그래프가 있다. 이 포물선과 직선 $y=-3$에 대하여 대칭인 포물선의 그래프의 x 절편의 x 좌표값을 각각 $\alpha,\ \beta$라 할 때, $\alpha^2+\beta^2$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

꼭짓점의 좌표가 $(-1,\ -8)$인 이차함수의 방정식은

$y=a(x+1)^2-8$이고 점 $(2,\ 10)$을 지나므로

$10=a(2+1)^2-8$

$\therefore\ a=2$

따라서 이차함수의 그래프는 $y=2(x+1)^2-8$

이 포물선과 직선 $y=-3$에 대하여 대칭인 포물선의 그래프는

꼭짓점의 좌표가 $(-1,\ 2)$ 이므로

$y=-2(x+1)^2+2$

이 그래프의 x 절편은 $y=0$일 때의 x의 값이므로

$-2x^2-4x=0$

$\therefore\ x=0,\ -2$

$\therefore\ \alpha^2+\beta^2=4$

7. 이차함수 $y = \frac{1}{2}(x+a)^2 + b$ 의 그래프는 $x < -2$ 이면 x 의 값이 증가할 때, y 의 값은 감소하고, $x > -2$ 이면 x 의 값이 증가할 때, y 의 값도 증가한다. 이 그래프가 점 $(-1,\ 3)$ 을 지날 때, 꼭짓점의 좌표를 구하면?

① $(-2,\ 1)$　② $(3,\ 5)$　③ $\left(-2,\ \frac{5}{2}\right)$

④ $(2,\ 5)$　⑤ $\left(-1,\ \frac{2}{5}\right)$

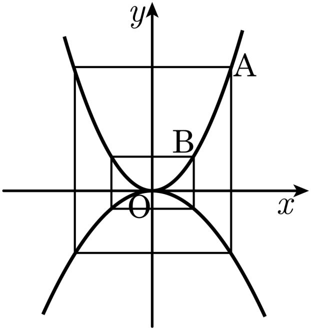
해설

$x = -2$를 기준으로 x 값에 따른 y 값의 변화가 달라지므로, 축의 방정식은 $x = -2$, $\therefore a = 2$

$y = \frac{1}{2}(x+2)^2 + b$ 의 그래프가 점 $(-1,\ 3)$ 을 지나므로 $3 = \frac{1}{2}(-1+2)^2 + b$, $\therefore b = \frac{5}{2}$

따라서 $y = \frac{1}{2}(x+2)^2 + \frac{5}{2}$ 에서 꼭짓점의 좌표는 $\left(-2,\ \frac{5}{2}\right)$ 이다.

8. 다음 그림과 같이 두 함수 $y=x^2$, $y=-\frac{1}{2}x^2$에 대하여 두 직사각형이 서로 다른 닮음이다. A의 x좌표를 a, B의 x좌표를 b라 할때, ab의 값을 구하면?



① $\frac{4}{9}$ ② $\frac{16}{9}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

해설

서로 같지 않는 닮음 이므로 큰 사각형의 가로와 작은 사각형의 세로가 대응변이다.

그러므로 $2a : \frac{3}{2}a^2 = \frac{3}{2}b^2 \ : \ 2b$에서

$\frac{9}{4}a^2b^2 = 4ab$

$\therefore ab = \frac{16}{9}$

9. 이차함수 $y=(x-2)(x+k^2)$ $(k>0)$ 의 그래프가 y 축과 만나는 점과 양의 x 절편 그리고 직선 $y=x+2$ 가 y 축과 만나는 점을 연결한 삼각형의 외심 O 의 y 좌표가 -5 일 때, k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\sqrt{6}$

해설

포물선이 y 축과 만나는 점은 $(0,\ -2k^2)$ 이고 직선의 y 절편은 $(0,\ 2)$ 이고, 양의 x 절편은 $(2,\ 0)$ 이다.

외심 O 의 y 좌표가 -5 이므로 $\dfrac{2-2k^2}{2}=-5$

$\therefore\ k=\pm\sqrt{6}$

따라서 $k>0$ 이므로 $k=\sqrt{6}$ 이다.

10. 다음 중 이차함수에 대한 설명이 옳지 않는 것은?

① $y = x^2$ 에서 $x > 0$ 일 때, x값이 증가하면 y값도 증가한다.

② $y = ax^2 + b(a \neq 0)$는 $x = b$를 축으로 하고 점 $(0,\ b)$를 꼭짓점으로 하는 포물선이다.

③ $y = ax^2$ 과 $y = -ax^2$ 의 그래프는 x축에 대하여 대칭이다.

④ $y = ax^2 + bx + c(a \neq 0)$ 에서 $|a|$ 의 값이 같으면 폭도 같다.

⑤ $y = ax^2$ 에서 $a < 0$ 일 때, a가 커지면 폭이 넓어진다.

해설

① 아래로 볼록이므로 축의 오른쪽(축보다 큰 범위)에서 x값이 증가하면 y값도 증가한다.

② $x = 0$(y축)을 축으로 하고, $(0,\ b)$를 꼭짓점으로 한다.

③ $y = ax^2$ 과 $y = -ax^2$ 의 그래프는 x축에 대하여 대칭이다.

④ $y = ax^2 + bx + c(a \neq 0)$ 에서의 $|a|$ 의 값이 같으면 폭도 같다.

⑤ $y = ax^2$ 에서 $a < 0$ 일 때 a가 커지면 $|a|$ 이 작아지므로 폭은 넓어진다.

11. 다음 보기 중 이차함수에 대한 설명이 옳은 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $y = ax^2 + b(a \neq 0)$는 $x = b$ 를 축으로 하고 점 $(0,\ a)$ 를 꼭짓점으로 하는 포물선이다.

㉡ $y = ax^2 + bx + c(a \neq 0)$ 에서 $|a|$ 의 값이 같으면 폭도 같다.

㉢ $y = ax^2$ 에서 $a < 0$ 일 때, a 가 커지면 폭이 좁아진다.

㉣ $y = -x^2$ 에서 $x < 0$ 일 때, x 값이 증가하면 y 값도 증가한다.

㉤ $y = ax^2$ 과 $y = -ax^2$ 의 그래프는 x 축에 대하여 대칭이다.

① ㉠,㉡,㉠ ② ㉠,㉡,㉣ ③ ㉠,㉡,㉤

④ ㉡,㉢,㉣ ⑤ ㉡,㉣,㉤

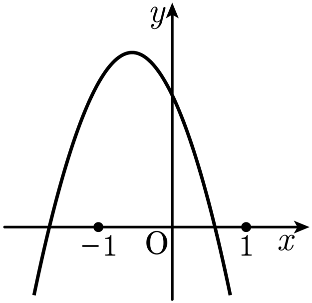
해설

㉠ $y = ax^2 + b(a \neq 0)$ 은 $x = 0$을 축으로 하고 점 $(0,\ b)$ 를 꼭짓점으로 하는 포물선이다.

㉢ $y = ax^2$ 에서 $a < 0$ 일 때, a 가 커지면 폭이 넓어진다.

따라서 옳은 것은 ㉡,㉣,㉤이다.

12. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프가 다음과 같을 때, 다음 중 옳은 것을 구하면?



① $a > 0$ ② $b < 0$ ③ $c < 0$

④ $a + b + c > 0$ ⑤ $a - b + c < 0$

해설

① 위로 볼록하므로 $a < 0$
② 축이 y 축의 왼쪽에 있으므로 $ab > 0$
따라서 $b < 0$ 이다.
③ y 절편이 양수이므로 $c > 0$
④ $x = 1$ 일 때, $y = a + b + c < 0$
⑤ $x = -1$ 일 때, $y = a - b + c > 0$

13. 이차함수 $y = -2x^2 - ax + 7$ 의 그래프가 점 $(1,\ 1)$ 을 지날 때의 설명으로 옳지 않은 것은?

① 직선 $x = -1$ 을 축으로 한다.

② 꼭짓점의 좌표는 $(-1,\ 7)$ 이다.

③ $y = -2x^2 + 4x + 7$ 의 그래프와 y 축에 대하여 대칭이다.

④ x 축과 두 점에서 만난다.

⑤ y 축과의 교점의 좌표는 $(0,\ 7)$ 이다.

해설

$y = -2x^2 - ax + 7$ 의 그래프가 점 $(1,\ 1)$ 을 지나므로 $x = 1,\ y = 1$ 을 대입하면,

$-2 - a + 7 = 1 \therefore\ a = 4$

따라서 포물선의 식은 $y = -2x^2 - 4x + 7 = -2(x + 1)^2 + 9$

① 축의 식은 $x = -1$

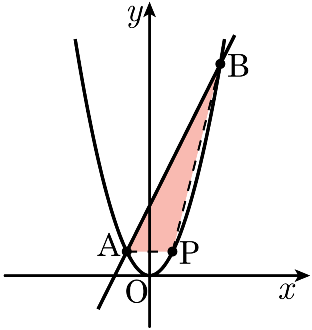
② 꼭짓점의 좌표는 $(-1,\ 9)$

③ y 축에 대칭인 그래프는 x 대신 $-x$ 를 대입하면 $y = -2x^2 + 4x + 7$

④ 그래프의 개형 (대략적인 모양) 을 그려보면 x 축과 두 점에서 만난다.

⑤ y 절편은 7 이고 y 축과의 교점의 좌표는 $(0,\ 7)$

14. 포물선 $y = x^2$ 과 직선 $y = 2x + 3$ 의 교점을 A, B 라하고, 원점을 O 라 한다. 점 P 가 원점을 출발하여 포물선을 따라 B까지 움직일 때, $\triangle$APB 의 넓이와 $\triangle$OAB 의 넓이가 같게 되는 점 P 의 좌표는?



① $(1, 1)$　② $(1, 2)$　③ $(2, 1)$　④ $(2, 4)$　⑤ $(3, 2)$

해설

$\triangle$APB 와 $\triangle$AOB 의 넓이가 같으면 직선 AB 와 직선 OP 는 평행하므로

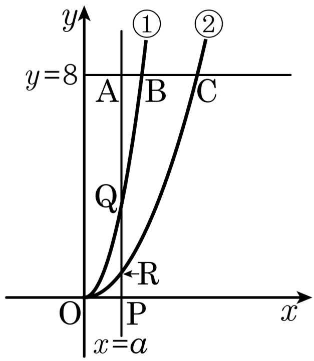
직선 OP 의 기울기는 2 이고 직선 OP 는 $y = 2x$ 이다. 점 P 는 $y = x^2$ 과 $y = 2x$ 의 교점이므로

$x^2 = 2x,\ x^2 - 2x = 0,\ x(x-2) = 0$

$\therefore x = 2,\ y = 4$ 또는 $x = 0,\ y = 0$ (원점)

그런데 P 는 원점이 아니므로 P$(2,\ 4)$ 이다.

15. 다음 그림은 이차함수 $y=2x^2(x\geq 0)\cdots①$, $y=\frac{1}{2}x^2(x\geq 0)\cdots②$의 그래프이다. 직선 $y=8$ 이 y 축 및 곡선 ①, ②와 점 $\mathrm{A, B, C}$ 에서 만나고 $x=a$ 가 x 축 및 곡선 ②, ①과 점 $\mathrm{P, R, Q}$ 에서 만날 때, $\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{BC}}}$ 와 $\frac{\overline{\mathrm{QR}}}{\overline{\mathrm{PR}}}$ 의 합을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

i) $8=2\mathrm{x}^2, \mathrm{x}^2=4$ $x>0$ 이므로 $x=2$

$8=\frac{1}{2}x^2, x^2=16$ 에서 $x>0$ 이므로 $x=4$

$\therefore \frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{BC}}}=\frac{2}{4-2}=\frac{2}{2}=1$

ii) $\overline{\mathrm{PR}}=\frac{1}{2}\mathrm{a}^2, \overline{\mathrm{PQ}}=2\mathrm{a}^2,$

$\overline{\mathrm{QR}}=2a^2-\frac{1}{2}a^2=\frac{3}{2}a^2$

$\therefore \frac{\overline{\mathrm{QR}}}{\overline{\mathrm{PR}}}=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}=3$

$\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{BC}}}+\frac{\overline{\mathrm{QR}}}{\overline{\mathrm{PR}}}=1+3=4$

16. $f(-3)=15,\ f(x^2)\cdot(x^2+x+3)=f(x)$ 를 만족하는 함수 $f(x)$ 에 대하여 $f(-9)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\dfrac{125}{93}$

해설

$f(x^2)\cdot(x^2+x+3)=f(x)$ 에서 $x=-3$ 을 대입하면 $9f(9)=f(-3)=15$

$\therefore\ f(9)=\dfrac{5}{3}$

따라서

$f(x^2)\cdot(x^2+x+3)=f(x)$ 에서 $f(x^2)=\dfrac{f(x)}{(x^2+x+3)}$ 이고

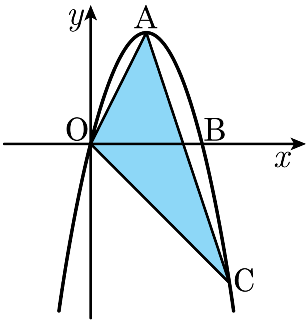
$f(x^2)\cdot(x^2-x+3)=f(-x)$ 이므로

$$\begin{aligned} f(-x) &= f(x^2)\cdot(x^2-x+3) \\ &= \frac{f(x)}{(x^2+x+3)}\cdot(x^2-x+3) \end{aligned}$$

이 식에 $x=9$ 를 대입하면

$f(-9)=\dfrac{\frac{5}{3}}{93}\times 75=\dfrac{125}{93}$ 이다.

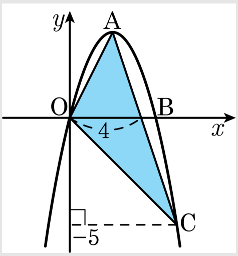
17. 이차함수 $y = -x^2 + 4x$ 의 그래프가 아래 그림과 같을 때, $\triangle AOB : \triangle OBC = 4 : 5$ 가 되는 점 C 의 좌표는? (단, 점 A 는 꼭짓점, 점 B 는 포물선과 x 축과의 교점, 점 C 는 포물선 위에 있는 4 사분면의 점이다.)



① $(5, \ -5)$ ② $(4, \ -3)$ ③ $(6, \ -2)$
④ $(2, \ -8)$ ⑤ $(3, \ -4)$

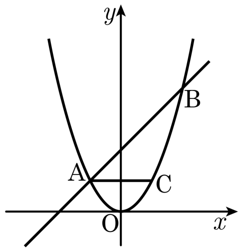
해설

$y = -x^2 + 4x = -(x-2)^2 + 4$ 이므로 꼭짓점 $A(2, 4)$
또한 $y = 0$ 일 때, $0 = -x^2 + 4x \Leftrightarrow x(x-4) = 0$
따라서 점 $B(4, 0)$ 이다. $\therefore \triangle AOB = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8$
$\triangle AOB : \triangle OBC = 4 : 5$ 이므로 $\triangle OBC$ 의 넓이는 10 이다.



$\triangle OBC$ 의 밑변을 $\overline{OB} = 4$ 라고 하면 높이는 5 가 된다. 즉 점 C 의 y 좌표가 -5 이다.
점 C 의 x 좌표를 c 라고 하면 $-c^2 + 4c = -5$
$c^2 - 4c - 5 = 0 \Leftrightarrow (c-5)(c+1) = 0$, $c > 0$ 이므로 $c = 5$
$\therefore C(5, -5)$

18. 다음 그림과 같이 이차함수 $y=\frac{1}{2}x^2$과 직선 $y=x+4$의 교점을 A, B라 하고 삼각형 ABC의 넓이가 12가 되는 이차곡선 위의 한 점을 C라 하자. 점 C를 지나고 삼각형 ABC의 넓이를 2 등분하는 직선의 기울기를 구하여라. (단, 점 C는 1 사분면에 위치한다.)



▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

두 그래프의 교점을 구하면

$\frac{1}{2}x^2=x+4$, $x^2-2x-8=0$ 이므로

교점 A, B 는 $(-2,\ 2)$, $(4,\ 8)$이다.

점 C의 좌표를 $\left(a,\ \frac{1}{2}a^2\right)$이라 하면

$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\times(2+8)\times 6-\frac{1}{2}\left(2+\frac{1}{2}\mathrm{a}^2\right)(\mathrm{a}+2)$$
$$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}a^2+8\right)(4-a)$$
$$=-\frac{3}{2}a^2+3a+12=12$$

$\therefore\ a=2(\because\ x>0)$

따라서 점 C의 좌표는 $(2,\ 2)$

점 C를 지나고 삼각형 ABC의 넓이를 2 등분하는 직선은 선분 AB의 중점인 $(1,\ 5)$를 지난다.

따라서 이 직선의 기울기는 -3이다.

19. 다음은 $y = 2x^2 - kx + 3$ 이 점 $(1,1)$ 을 지날 때의 설명을 나타낸 것이다. 이 때, 옳지 <u>않은</u> 것을 모두 고르면?

㉠ 꼭짓점의 좌표는 $(-1,\ 1)$ 이다.

㉡ 직선 $x = 1$ 을 축으로 한다.

㉢ x 축과 한 점에서 만난다.

㉣ y 축과의 교점의 좌표는 $(0, 3)$ 이다.

㉤ $y = 2x^2$ 의 그래프를 x 축으로 -1, y 축으로 3 만큼 평행이동한 것이다.

① ㉠,㉡,㉢　② ㉠,㉡,㉣　③ ㉠,㉡,㉤

④ ㉠,㉢,㉤　⑤ ㉠,㉣,㉤

해설

$y = 2x^2 - kx + 3$ 이 점 $(1, 1)$ 을 지나므로 $1 = 2 - k + 3, k = 4$

$y = 2x^2 - 4x + 3 = 2(x-1)^2 + 1$

㉠ 꼭짓점의 좌표 $(1, 1)$

㉢ x축과 만나지 않는다.

㉤ x축으로 1, y축으로 1만큼 평행이동한 것이다.

20. 이차함수 $y = x^2 - 6kx + 9k^2 - 4$ 의 그래프의 꼭짓점을 A, y 절편을 B, x 절편을 각각 C, D 라 할 때, 사각형 ABCD 의 넓이가 36 가 되는 모든 k 의 값의 곱을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$y = x^2 - 6kx + 9k^2 - 4 = (x - 3k)^2 - 4$

$\therefore\ \mathrm{A}(3k,\ -4),\ \mathrm{B}(0,\ 9k^2 - 4)$

$y = x^2 - 6kx + 9k^2 - 4$ 에서 $x = 3k - 2$ 또는 $3k + 2$

$\therefore\ \mathrm{C}(3k - 2,\ 0),\ \mathrm{D}(3k + 2,\ 0)$

$k > 0$ 이므로 y 절편, 두 개의 x 절편 모두 0 보다 크다.

$$\begin{aligned}\therefore\ \square\mathrm{ABCD} &= \triangle\mathrm{CAD} + \triangle\mathrm{BCD} \\ &= \frac{1}{2} \times 4 \times (3k + 2 - 3k + 2) \\ &\quad + \frac{1}{2} \times (9k^2 - 4)(3k + 2 - 3k + 2) \\ &= 36\end{aligned}$$

이 식을 정리하면 $8 + 2 \times (9k^2 - 4) = 36$

$k^2 = 2 \qquad \therefore\ k = \pm\sqrt{2}$

따라서 k 값의 곱은 $\sqrt{2} \times (-\sqrt{2}) = -2$ 이다.