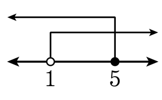
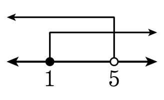
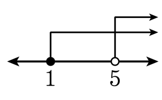
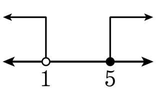
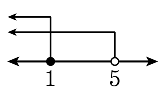
1. 연립부등식 $\begin{cases} 4x > 5x - 1 \\ 2x + 6 \le 5x - 9 \end{cases}$ 의 해를 수직선 위에 바르게 나타낸 것은?

① 

② 

③ 

④ 

⑤ 

해설

$$\begin{cases} 4x > 5x - 1 & \Rightarrow \ x < 1 \\ 2x + 6 \le 5x - 9 & \Rightarrow \ x \ge 5 \end{cases}$$

$\therefore \ x < 1, \ x \ge 5$

2. 연립부등식 $\begin{cases} x^2 - x - 6 \le 0 \\ 4x^2 - 8x + 3 \ge 0 \end{cases}$ 을 풀면?

① $-2 \le x \le \frac{1}{2}$ 또는 $\frac{3}{2} \le x \le 3$
② $-2 \le x \le \frac{1}{2}$ 또는 $2 \le x \le 3$
③ $-2 \le x \le \frac{1}{2}$ 또는 $\frac{3}{2} \le x \le 2$
④ $-2 \le x \le 1$ 또는 $\frac{3}{2} \le x \le 3$
⑤ $-2 \le x \le 1$ 또는 $\frac{3}{2} \le x \le 2$

해설

$\begin{cases} x^2 - x - 6 \le 0 & \cdots ㉠ \\ 4x^2 - 8x + 3 \ge 0 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠ $(x-3)(x+2) \le 0$
$-2 \le x \le 3$
㉡ $(2x-3)(2x-1) \ge 0$
$x \ge \frac{3}{2}, \quad x \le \frac{1}{2}$
㉠과 ㉡의 공통범위 :
$-2 \le x \le \frac{1}{2}, \quad \frac{3}{2} \le x \le 3$

3. 두 점 $\mathrm{A}(3,2)$, $\mathrm{B}(a,b)$를 지나는 직선이 직선 $x+2y-3=0$과 직교하고, 그 교점은 선분 AB를 $2:1$로 내분한다. 이때, $3a+b$의 값은?

① 3　　② 5　　③ 7　　④ 9　　⑤ 10

해설

직선 AB의 기울기는 2이므로

$$\frac{b-2}{a-3}=2$$

$b-2=2(a-3)$, $b=2a-4$ ······ ㉠

$\overline{\mathrm{AB}}$ 를 $2:1$로 내분하는 점은

$\left(\frac{2a+1\cdot 3}{2+1}, \frac{2b+1\cdot 2}{2+1}\right)=\left(\frac{2a+3}{3}, \frac{2b+2}{3}\right)$ 이고,

이 점은 직선 $x+2y-3=0$ 위에 있으므로

$\frac{2a+3}{3}+2\,\frac{2b+2}{3}-3=0$,

$a+2b-1=0$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=\frac{9}{5}$, $b=-\frac{2}{5}$

$\therefore\ 3a+b=5$

4. 점 $(5, 1)$ 을 직선 $y = 3$ 에 대하여 대칭이동한 다음 y 축의 방향으로 4 만큼 평행이동한 점은 점 $(5, 1)$ 을 직선 $y = b$ 에 대하여 대칭이동한 점과 같다. 이때, 상수 b 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

(i) 점 $(5, 1)$ 을 직선 $y = 3$ 에 대하여
대칭이동한 점의 좌표는 $(5, 2 \cdot 3 - 1)$ 즉, $(5, 5)$
점 $(5, 5)$ 를 다시 y 축의 방향으로 4 만큼
평행이동한 점의 좌표는 $(5, 5 + 4)$
즉, $(5, 9)$

(ii) 점 $(5, 1)$ 을 직선 $y = b$ 에 대하여
대칭이동한 점의 좌표는 $(5, 2b - 1)$

(i), (ii) 로부터 $2b - 1 = 9$ $\quad \therefore b = 5$

5. 연립이차방정식 $\begin{cases} 3x^2 + y = 6 \\ 9x^2 - y^2 = 0 \end{cases}$ 를 만족시키는 x 값을 모두 더하면?

① 0 ② 15 ③ 10 ④ −10 ⑤ −15

해설
$9x^2 - y^2 = 0$ 에 $3x^2 + y = 6$ 을 대입하면
$9x^2 - (-3x^2 + 6)^2 = -9x^4 + 45x^2 - 36 = 0$
$x^4 - 5x^2 + 4 = (x^2 - 4)(x^2 - 1) = 0$
$\therefore x = \pm 1,\ \pm 2$
$\therefore x$ 의 합은 $+1 - 1 + 2 - 1 = 0$

6. 다음 방정식을 만족하는 실수 x, y의 합을 구하여라.

$$(x^2+1)(y^2+4)=8xy$$

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

▷ 정답 : 3

해설

$(x^2+1)(y^2+4)=8xy$에서 $x^2y^2+4x^2+y^2+4-8xy=0$
이것을 완전제곱식의 꼴로 변형하면
$(x^2y^2-4xy+4)+(4x^2 4xy+y^2)=0$
이 때, x, y가 실수이므로 $xy-2$, $2x-y$도 실수이다.
$\therefore xy-2=0 \quad \cdots$ ㉠,
$2x-y=0 \quad \cdots$ ㉡
㉡에서 $y=2x$이고, 이것을 ㉠에 대입하면 $x^2=1$
따라서, $x=1$일 때 $y=2$, $x=-1$일 때 $y=-2$
그러므로 x, y의 값은 $x=\pm1$, $y=\pm2$(복부호 동순)
따라서 x, y의 합은 $-3, 3$

7. 이차방정식 $2x^2-5x+k=0$ 의 근이 유리수가 되는 k 의 최대 정수값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

근이 유리수이므로, 판별식D ≥ 0 이어야 한다.

$D=25-8k \geq 0$ 곧, $k \leq \frac{25}{8}$ 이어야 한다.

k 는 정수이므로 $k=3,\ 2,\ 1,\ \cdots$ 이고,

이 중 $D \geq 0$ 조건을 만족하는 최대 정수는 $k=3$ 이다.

8. 이차방정식 $x^2 - ax + a + 2 = 0$의 두 근이 모두 정수가 되게 하는 모든 상수 a에 대한 설명 중 옳은 것은?

① a는 -10 이상 -2 이하이다.

② a는 -2 이상 6 이하이다.

③ a는 6 이상이다.

④ a는 0 이하이다.

⑤ a는 0 이상 8 이하이다.

해설

두 정수근을 α, β라 하면 (단, $\beta \geq \alpha$)
$\alpha + \beta = a,\ \alpha\beta = a + 2$
이 두 식에서 a를 소거하면
$\alpha\beta - \alpha - \beta = 2,\ (\alpha - 1)(\beta - 1) = 3$
$\alpha - 1, \beta - 1$이 정수이므로
$\therefore\ \alpha = 2,\ \beta = 4$ 또는 $\alpha = -2,\ \beta = 0$
$\therefore\ a = 6,\ -2$

9. 연립부등식 $\begin{cases} x-4>-5 \\ 1+3x<a \end{cases}$ 의 해가 $-1<x<2$ 일 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$x-4>-5 \Rightarrow x>-1$

$1+3x<a$

$3x<a-1$

$x<\frac{a-1}{3}$

$\frac{a-1}{3}=2,\ a-1=6$

$\therefore\ a=7$

10. x에 관한 이차방정식 $x^2+(a^2-5a-6)x-a+1=0$이 서로 다른 부호의 실근을 갖고, 양근이 음근의 절대값보다 크거나 같을 때, 만족하는 정수 a의 값을 모두 더하면?

① 15　　② 17　　③ 19　　④ 20　　⑤ 21

해설

서로 다른 부호의 실근이므로 (두 근의 곱) < 0
양근이 음근의 절대값보다 크거나 같으므로
(두 근의 곱) < 0이므로
$-a+1<0 \quad \therefore a>1 \cdots$ ①
(두 근의 합) ≥ 0이므로
$-(a^2-5a-6) \geq 0$
$a^2-5a-6 \leq 0$
$(a-6)(a+1) \leq 0$
$\therefore -1 \leq a \leq 6 \cdots$ ②
①, ②에서 $a=2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$
$\therefore\ 2+3+4+5+6=20$

11. 평지의 공원에 둘레의 길이는 $200\,\mathrm{m}$로 일정하고 넓이는 $900\,\mathrm{m}^2$ 이상인 직사각형 모양의 화단을 만들려고 한다. 이 때, 만들어지는 화단의 가로의 최대 길이는?

① $40\,\mathrm{m}$ ② $50\,\mathrm{m}$ ③ $90\,\mathrm{m}$

④ $100\,\mathrm{m}$ ⑤ $150\,\mathrm{m}$

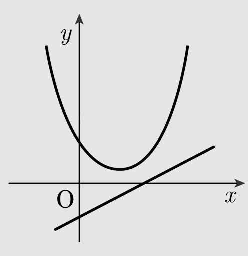
해설

화단의 가로 길이를 $x\,\mathrm{m}$라고 하면
세로의 길이는 $(100-x)\,\mathrm{m}$이다.
가로, 세로의 길이는 모두 양수이므로
$x>0,\ 100-x>0$에서 $0<x<100\cdots$㈎
$900\,\mathrm{m}^2$ 이상이므로
$x(100-x)\geq 900$
$x^2-100x+900\leq 0,\ (x-10)(x-90)\leq 0$
$\therefore 10\leq x\leq 90$
이것은 ㈎를 만족하므로
가로의 최대 길이는 $90\,\mathrm{m}$이다.

12. 포물선 $y = x^2 - 2x + 3$ 이 직선 $y = 2x + k$ 보다 위쪽에 있도록 실수 k 의 범위를 구하면?

① $k < -1$ ② $-1 < k < 0$ ③ $k > 0$
④ $0 < k < 1$ ⑤ $k > 1$

해설



포물선 $y = x^2 - 2x + 3$ 이 직선 $y = 2x + k$ 보다 위쪽에 있으려면
위 그림에서 모든 실수 x 에 대하여
부등식 $x^2 - 4x + 3 - k > 0$가 항상 성립해야 한다.
즉 $x^2 - 4x + 3 - k > 0$ 에서
판별식이 0 보다 작아야 하므로
$\frac{D}{4} = 4 - (3 - k) < 0$
$\therefore\ k < -1$

13. $1 \le x \le 2$ 인 모든 실수 x에 대하여 부등식 $ax < 4 + x - x^2$ 이 항상 성립할 때, 실수 a의 값의 범위를 구하면?

① $a < 1$ ② $a < 2$ ③ $a < 3$ ④ $a < 4$ ⑤ $a < 5$

해설

부등식 $ax < 4 + x - x^2$ 에서 $x^2 + (a-1)x - 4 < 0$
$1 \le x \le 2$ 에서
이 부등식이 항상 성립해야 하므로
방정식 $x^2 + (a-1)x - 4 = 0$ 의 한 근이1 보다 작고, 다른 한 근은 2 보다 커야 한다.
$f(x) = x^2 + (a-1)x - 4$ 로 놓으면
$f(1) = 1 + (a-1) - 4 < 0$ 에서 $a < 4 \cdots$ ㉠
$f(2) = 4 + 2(a-1) - 4 < 0$ 에서 $a < 1 \cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 $a < 1$

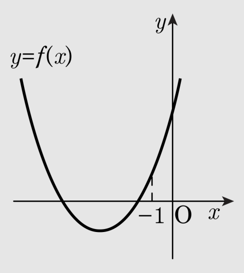
14. x 에 대한 이차방정식 $x^2-2kx+6-k=0$ 의 서로 다른 두 근이 모두 -1 보다 작을 때, 정수 k 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 3개

해설

$f(x)=x^2-2kx+6-k$ 라 하면
방정식 $f(x)=0$ 의 서로 다른 두 근이 -1 보다 작으므로



(ⅰ) $\frac{D}{4}=(-k)^2-(6-k)>0$ 에서
$k^2+k-6>0,\ (k+3)(k-2)>0$
$\therefore\ k<-3$ 또는 $k>2$

(ⅱ) $f(-1)=1+2k+6-k>0$ 에서 $k>-7$

(ⅲ) $-\frac{-2k}{2}<-1$ 에서 $k<-1$
이상에서 $-7<k<-3$
따라서 정수 k 는 $-6,\ -5,\ -4$ 의 3 개다.

15. 두 점 A(1, 3), B(4, 0) 을 지나는 직선에 수직이고 선분 AB 를 $1:2$ 로 외분하는 점을 지나는 직선의 방정식을 구하면 $y = ax + b$ 이다. $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a + b = 9$

해설

직선 AB 의 기울기는 $\frac{0-3}{4-1} = -1$ 이므로

직선 AB 에 수직인 직선의 기울기는 1 이다.

또, 선분 AB 를 $1:2$ 로 외분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{1\times4-2\times1}{1-2}, \frac{1\times0-2\times3}{1-2}\right)$, 즉 $(-2, 6)$

따라서 구하는 직선은 기울기가 1 이고

점 $(-2, 6)$ 을 지나므로

$y - 6 = 1\cdot(x+2)$, $y = x + 8$

$a = 1$, $b = 8$ $\quad\therefore a + b = 9$

16. 점 $(3,\ 4)$ 에서 직선 $2x-y+k=0$ 까지의 거리가 $\sqrt{5}$ 일 때, 양수 k 의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$\dfrac{|2\times3-4+k|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\sqrt{5}$ 이므로, $|2+k|=5$ 이다.

따라서 $k=3$ ($\because$ k 는 양수)

17. 중심 C 가 직선 $y = 2x + 1$ 위에 있고 두 점 $(2,\ 1),\ (6,\ 5)$ 를 지나는 원의 면적은?

① 10π ② 12π ③ 14π ④ 16π ⑤ 18π

해설

구하는 원을
$x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0 \cdots\cdots$ ①라 두면
①은 $(2,\ 1),\ (6,\ 5)$ 를 지나므로
$4 + 1 + 4A + 2B + C = 0 \cdots\cdots\cdots$ ②
$36 + 25 + 12A + 10B + C = 0 \cdots\cdots\cdots$ ③
또한 ①의 중심은 $(-A,\ -B)$ 이므로
$-B = 2 \cdot (-A) + 1 \cdots\cdots\cdots$ ④
②, ③, ④에서 $A = -2,\ B = -5,\ C = 13$ 이고
①의 반지름의 길이는 $\sqrt{A^2 + B^2 - C} = \sqrt{16}$
구하는 원의 면적은 16π

해설

중심 $C(a, 2a + 1)$ 이라 하면
$(x - a)^2 + (y - 2a - 1)^2 = r^2$
$(2,\ 1),\ (6,\ 5)$ 를 지나므로 각각 대입하면
$(2 - a)^2 + (1 - 2a - 1)^2 = r^2 \cdots$ ①
$(6 - a)^2 + (5 - 2a - 1)^2 = r^2 \cdots$ ②
①, ②를 연립해서 풀면 $a = 2$, ①에 대입하면 $r = 4$

18. 직선 $y=ax+b$ 를 평행이동 $f\ :\ (x,\ y)\ \rightarrow\ (x-1,\ y+2)$ 에 의하여 옮겼더니 직선 $y=2x+3$ 과 y축 위에서 직교할 때, $a-b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -2

해설

$y=ax+b$ 의 x , y 대신에 각각 $x+1$, $y-2$ 를 대입하면
$y-2=a(x+1)+b$
$\therefore y=ax+a+b+2$
이 직선과 직선 $y=2x+3$ 이 y 축 위에서 직교하므로
두 직선의 기울기의 곱은 -1 이고, $(0,\ 3)$ 을 지난다.
$a\times 2=-1$, $a+b+2=3$
연립하여 풀면
$a=-\frac{1}{2}$, $b=\frac{3}{2}$
$\therefore a-b=-2$

19. 원 $(x+1)^2+(y-2)^2=1$ 을 직선 $2x-y-1=0$ 에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은?

① $(x-1)^2+(y-5)^2=1$ ② $(x-1)^2+(y-2)^2=1$
③ $(x-3)^2+y^2=1$ ④ $(x-3)^2+(y-1)^2=1$
⑤ $(x-3)^2+(y-2)^2=1$

해설

원 $(x+1)^2+(y-2)^2=1$ 을
직선 $2x-y-1=0$ 에 대하여 대칭이동한
원의 중심을 (a,b) 라 하면
두 점 $(-1,2)$, (a,b) 를 이은
선분의 중점 $\left(\frac{a-1}{2}, \frac{b+2}{2}\right)$ 가
직선 $2x-y-1=0$ 위에 있으므로
$2\cdot\frac{a-1}{2}-\frac{b+2}{2}-1=0$
$\therefore 2a-b=6 \cdots\cdots$ ㉠
또, 두 점 $(-1,2)$, (a,b) 를 지나는 직선과
직선 $2x-y-1=0$ 이 수직이므로
$\frac{b-2}{a+1}\cdot 2=-1$
$\therefore a+2b=3 \cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3, b=0$
따라서, 원 $(x+1)^2+(y-2)^2=1$ 을
직선 $2x-y-1=0$ 에 대하여 대칭이동한 도형은
중심이 $(3,0)$ 이고, 반지름의 길이가 1 인 원이므로
구하는 원의 방정식은
$(x-3)^2+y^2=1$

20. 다음 x에 관한 두 개의 이차방정식 $\begin{cases} x^2-2x+a^2=0 \cdots ㉠ \\ x^2-ax+2a=0 \cdots ㉡ \end{cases}$

에서 공통근이 오직 한 개일 때, a의 값과 공통근 k를 구하면?(단, a는 실수)

① $a=0$일 때 $k=0$, $a=-1$일 때, $k=1$

② $a=2$일 때 $k=1\pm\sqrt{3}i$

③ $a=1$일 때 $k=1$, $a=2$일 때, $k=1$

④ $a=3$일 때 $k=2\pm\sqrt{3}$

⑤ $a=2$일 때 $k=-1$, $a=3$일 때, $k=1$

해설

공통근을 $x=k$라 하면

$k^2-2k+a^2=0 \quad \cdots ①$

$k^2-ka+2a=0 \quad \cdots ②$

두 식을 빼주면, $(k+a)(a-2)=0$

$\therefore a=2$ 또는 $k=-a$

ⅰ) $a=2$일 때

㉠, ㉡이 같아지므로 성립하지 않는다.

ⅱ) $k=-a$일 때

①에 넣으면 $a=0$또는 $a=-1$

$\begin{cases} a=0 \text{ 이면 } k=0 \\ a=-1 \text{ 이면 } k=1 \end{cases}$

21. 다음 방정식을 만족하는 양의 정수의 값이 <u>아닌</u> 것은?

$$x^2 - 3xy + 2y^2 + 6 = 0$$

① 5　　② 7　　③ 8　　④ 10　　⑤ 13

해설

$x^2 - 3xy + 2y^2 = -6$ 의 좌변을 인수분해하면 $(x-y)(x-2y) = -6$
이 때, x, y는 양의 정수이므로 $x-y$, $x-2y$도 정수이고 $x-y > x-2y$이다.
따라서, $x-y$, $x-2y$의 값은 다음 표와 같다.

$x-y$	1	2	3	6
$x-2y$	-6	-3	-2	-1

그러므로 각각을 연립하여 풀면 구하는 x, y의 값은

$\begin{cases} x = 8 \\ y = 7 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x = 7 \\ y = 5 \end{cases}$ 또는

$\begin{cases} x = 8 \\ y = 5 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x = 13 \\ y = 7 \end{cases}$

22. 두 부등식 $0.7 - x \le -2 - 0.1x$, $\frac{2+x}{3} \ge x + a$의 공통 부분이 없을 때, a의 값 중 가장 작은 정수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$0.7 - x \le -2 - 0.1x 7 - 10x \le -20 - x - 9x \le -27,\ x \ge 3$

$\frac{2+x}{3} \ge x + a 2 + x \ge 3x + 3a - 2x \ge 3a - 2,\ x \le 1 - \frac{3}{2}a$

공통 부분이 없으므로 $1 - \frac{3}{2}a < 3$,

$-\frac{3}{2}a < 2$

$\therefore\ a > -\frac{4}{3}$

따라서 가장 작은 정수 a의 값은 -1이다.

23. $[x]$는 x를 넘지 않는 최대 정수라고 할 때, $y=2[x]+3$, $y=3[x-2]+5$를 동시에 만족시키는 정수가 아닌 x에 대하여 $x+y$의 범위를 구하면?

① $13<x+y<14$
② $14<x+y<15$
③ $-4<x+y<4$
④ $15<x+y<16$
⑤ $x+y=16.4$

해설

$2[x]+3=3[x-2]+5,\ \ 2[x]+3=3([x]-2)+5$
$\therefore [x]=4$
x가 정수가 아니므로 $4<x<5$
$y=2[x]+3=11$이므로 $15<x+y<16$

24. 모든 실수 x에 대하여, 부등식 $k\{x^2-(k-2)x-3(k-2)\}>0$가 성립되게 하는 상수 k값의 범위를 구하면?

① $0<k<2$　② $1<k<2$　③ $1<k<4$
④ $-1<k<3$　⑤ $-2<k<-1$

해설

모든 실수 x에 대하여 성립하므로
$k>0\cdots$①
$x^2-(k-2)x-3(k-2)>0$이 항상 성립하려면
$D=(k-2)^2+12(k-2)<0$에서
$(k-2)(k+10)<0$
$\therefore\ -10<k<2\cdots$②
①, ②에서 $0<k<2$

25. 부등식 $ax^2+bx+a^2>2$ (a, b 는 실수) 의 해가 $1-\sqrt{2}<x<1+\sqrt{2}$ 일 때, $2a-b$ 의 값을 구하면?

① -5　② -6　③ -7　④ -8　⑤ -9

해설

$ax^2+bx+a^2-2>0 \cdots\cdots$ ㉠
해가 $1-\sqrt{2}<x<1+\sqrt{2}$ 인 이차부등식은
$\left\{x-(1-\sqrt{2})\right\}\left\{x-(1+\sqrt{2})\right\}<0$
즉, $x^2-2x-1<0 \cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡의 부등호의 방향이 같으려면
$a<0$ 이어야 한다.
㉡의 양변에 a 를 곱하면 $ax^2-2ax-a>0$
㉠과 일치하여야 하므로
$b=-2a,\ a^2-2=-a$
$a^2-2=-a$ 에서 $(a-1)(a+2)=0$
그런데, $a<0$ 이므로 $a=-2,\ b=4$
$\therefore\ 2a-b=-8$

26. 부등식 $\left|\frac{(1-a)x}{x^2+1}\right| < 1$이 모든 실수 x에 대하여 항상 성립할 때, a의 범위를 구하면?

① $0 < a \le 3$
② $a < -1$ 또는 $a > 3$
③ $-1 < a < 3$
④ $-1 \le a \le 3$
⑤ $-3 < a < 1$

해설

$-1 < \frac{(1-a)x}{x^2+1} < 1$

$\Rightarrow$ i) $-x^2 - 1 < (1-a)x$,

ii) $(1-a)x < x^2 + 1$

$\Rightarrow$ i) $x^2 + (1-a)x + 1 > 0$,

ii) $x^2 + (a-1)x + 1 > 0$

둘 모두 판별식이 0보다 작아야 한다.

$D = (1-a)^2 - 4 < 0$

$D = (a-1)^2 - 4 < 0$

$\Rightarrow (a-3)(a+1) < 0$

$\Rightarrow -1 < a < 3$

$-1 < a < 3$

$\therefore -1 < a < 3$

27. 이차방정식 $x^2-2ax+4=0$의 서로 다른 두 근이-3과 3 사이에 있도록 하는 정수 a의 개수는?(단, $f(x)=x^2-2ax+4$로 두고 풀어라.)

① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

$x^2-2ax+4=0$ 의 서로 다른 두 근이
-3과 3 사이에 있으면
(i) $D>0$, (ii) $f(-3)>0$, (iii) $f(3)>0$, (iv) 대칭축이 -3과 3 사이에 있다.

(i) $\mathrm{D}>0$에서 $\frac{\mathrm{D}}{4}=a^2-4>0$

$(a-2)(a+2)>0$

$\therefore a<-2,\ a>2$

(ii) $f(-3)>0$에서

$f(-3)=9+6a+4>0,\ \ 6a>-13$

$\therefore a>-\frac{13}{6}$

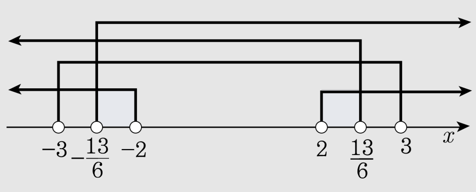
(iii) $f(3)>0$에서

$f(3)=9-6a+4>0,\ 13>6a,\quad \therefore \frac{13}{6}>a$

(iv) 대칭축의 방정식 $x=-\frac{(-2a)}{2}=a$ 에서

$-3<a<3$

(i), (ii), (iii), (iv)에서 a값의 범위를 수직선으로 나타내면 다음 그림과 같다.



$\therefore\ -\frac{13}{6}<a<-2,\ 2<a<\frac{13}{6}$ 이고 이 범위에 있는 정수는 없다.

28. $\triangle ABC$ 의 세변 AB, BC, CA 의 중점의 좌표가 각각 $(-2,\ 7)$, $(-6,\ 4)$, $(5,\ -2)$ 일 때, 이 삼각형의 무게중심의 좌표는 $(a,\ b)$ 이다. 이 때, $a+b$ 의 값을 구하면?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$A(a_1,\ b_1)$ $B(a_2,\ b_2)$ $C(a_3,\ b_3)$ 라고 하면 각 중점좌표는

$\left(\dfrac{a_1+a_2}{2},\ \dfrac{b_1+b_2}{2}\right)$,

$\left(\dfrac{a_2+a_3}{2},\ \dfrac{b_2+b_3}{2}\right)$,

$\left(\dfrac{a_3+a_1}{2},\ \dfrac{b_3+b_1}{2}\right)$ 이고

이들의 합을 3 으로 나누면,

$\left(\dfrac{a_1+a_2+a_3}{3},\ \dfrac{b_1+b_2+b_3}{3}\right)$ 로

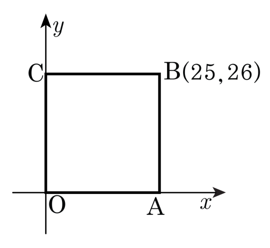
$\triangle ABC$ 의 무게중심의 좌표와 같다.

따라서 무게중심의 좌표는

$G=\left(\dfrac{-2-6+5}{3},\ \dfrac{7+4-2}{3}\right)=(-1,\ 3)$

$\therefore$ 2

29. 좌표평면 위에서 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점을 격자점이라 한다. 직선 $y=\frac{3}{8}x+1$은 아래 그림과 같은 직사각형 OABC 내부(경계선 제외)의 격자점을 모두 몇 개 지나는가?



① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

$y=\frac{3}{8}x+1$에서 x가 8의 배수이면 y도 정수가 된다.

$0<x<25,\ 0<y<26$에서 조건을 만족하는 정수의 순서쌍을 구하면

$(8,\ 4),\ (16,\ 7),\ (24,\ 10)$으로 모두 3개의 격자점을 지난다.

30. 네 점 $A(-2,\ 0)$, $B(2,\ 0)$, $C(2,\ 3)$, $D(-2,\ 3)$을 꼭지점으로 하는 직사각형 ABCD의 넓이가 직선 $mx+y-2m=0$에 의하여 이등분될 때, 상수 m의 값은?

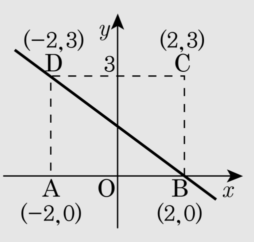
① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ $\frac{5}{4}$ ④ $\frac{7}{4}$ ⑤ $\frac{9}{4}$

해설

직선 $mx+y-2m=0$

즉 $y=-m(x-2)$은 m의 값에 관계없이 항상 점 $B(2,\ 0)$을 지난다.

이 때, 이 직선이 직사각형 ABCD의 넓이를 이등분하므로 점 $D(-2,\ 3)$을 지나야 한다.



따라서, $D(-2,\ 3)$을 대입하면 $3=-m(-2-2)$이므로

$\therefore\ m=\frac{3}{4}$

31. 두 점 $A(1,\ 0)$, $B(4,\ 0)$ 에서의 거리의 비가 $2:1$ 이 되도록 움직이는 점 P 의 자취는 원이다. 이 원의 둘레의 길이는?

① 2π ② $2\sqrt{3}\pi$ ③ 4π ④ $2\sqrt{5}\pi$ ⑤ 8π

해설

점 P 의 자취는 점 A, B 의 내분점, 외분점을 지름의 양끝으로 하는 원과 같다.

$\Rightarrow$ 내분점은 $\left(\frac{2\times4+1\times1}{2+1},\ 0\right)=(3,\ 0)$

$\Rightarrow$ 외분점은 $\left(\frac{2\times4-1\times1}{2-1},\ 0\right)=(7,\ 0)$

$\therefore$ 중심은 $(5,\ 0)$ 이고, 반지름은 2 인 원

$\Rightarrow$ 둘레의 길이는 $2\times2\times\pi=4\pi$

32. 두 원 $x^2 + y^2 - 2x = 0$, $x^2 + y^2 - 4y - 1 = 0$의 공통현의 길이를 구하면?

① $\sqrt{95}$　② $\dfrac{\sqrt{95}}{2}$　③ $\dfrac{\sqrt{95}}{3}$　④ $\dfrac{\sqrt{95}}{4}$　⑤ $\dfrac{\sqrt{95}}{5}$

해설

두 원의 공통현의 방정식은

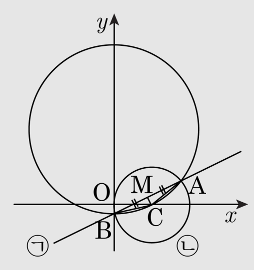
$x^2 + y^2 - 2x - (x^2 + y^2 - 4y - 1) = 0$

$-2x + 4y + 1 = 0,\ 2x - 4y - 1 = 0 \cdots\cdots$ ㉠

$x^2 + y^2 - 2x = 0$에서

$(x-1)^2 + y^2 = 1 \cdots\cdots$ ㉡

다음의 그림과 같이 두 원의 교점을 A, B, $\overline{\mathrm{AB}}$의 중점을 M, 원 ㉡의 중심을 C$(1, 0)$이라 하면



중심 C$(1, 0)$에서 직선 ㉠까지의 거리 $\overline{\mathrm{CM}}$은

$$\overline{\mathrm{CM}} = \frac{|2-0-1|}{\sqrt{2^2 + (-4)^2}} = \frac{1}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{10}$$

원 ㉡의 반지름의 길이는 1이므로 피타고라스의 정리에 의하여

$$\overline{\mathrm{AM}} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{10}\right)^2} = \frac{\sqrt{95}}{10}$$

따라서, 공통현의 길이 $\overline{\mathrm{AB}}$는

$$\overline{\mathrm{AB}} = 2\overline{\mathrm{AM}} = 2 \cdot \frac{\sqrt{95}}{10} = \frac{\sqrt{95}}{5}$$

33. 원 $x^2+y^2=1$ 밖의 점 $\mathrm{P}(3,\ 4)$에서 이 원에 두 개의 접선을 그을 때 그 접점을 Q, R이라고 하자. 직선 QR의 방정식을 $ax+by=1$라 할 때 $a+b$를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

접점의 좌표를 $\mathrm{Q}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{R}(x_2,\ y_2)$라고 하면
Q, R에서의 접선의 방정식은 각각
$x_1x+y_1y=1$, $x_2x+y_2y=1$이고,
두 접선은 모두 점 $\mathrm{P}(3,\ 4)$를 지나므로
$3x_1+4y_1=1$, $3x_2+4y_2=1$
여기서 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$는
방정식 $3x+4y=1$의 근이며, 이 두 접점을
지나는 직선은 오직 하나뿐이므로
직선 QR의 방정식은 $3x+4y=1$이다.
$\therefore\ a=3,\ b=4 \quad \therefore\ a+b=7$

34. 한 정점 A$(-2,\ 3)$ 에서 원 $x^2+y^2-2x+4y-3=0$ 에 이르는 거리의 최댓값을 M, 최솟값을 m 이라 할때, $M+m$ 의 값은?

① $2\sqrt{31}$　② $4\sqrt{2}+2\sqrt{31}$　③ $2\sqrt{34}$

④ $4\sqrt{2}+2\sqrt{34}$　⑤ $8\sqrt{2}$

해설

$x^2+y^2-2x+4y-3=(x-1)^2+(y+2)^2-8=0$

에서

$(x-1)^2+(y+2)^2=(2\sqrt{2})^2$

그림에서 점과 원 사이의 거리의 최댓값은

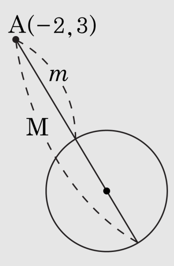
(점과 원의 중심 사이의 거리)+(반지름)

즉 $\sqrt{(-2-1)^2+(3+2)^2}+2\sqrt{2}=2\sqrt{2}+\sqrt{34}$

최솟값은 (점과 원의 중심 사이의 거리)-반지름

$=\sqrt{34}-2\sqrt{2}$

$\therefore M+m=2\sqrt{34}$



35. x 축 위의 두 점 $\mathrm{A}(2,\ 0)$, $\mathrm{B}(4, 0)$ 과 직선 $y = x$ 위를 움직이는 점 P 에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}} + \overline{\mathrm{BP}}$ 의 최솟값은?

① 2　② $2\sqrt{2}$　③ $2\sqrt{3}$　④ 4　⑤ $2\sqrt{5}$

해설

점 $\mathrm{A}(2, 0)$ 을 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 점을 A' 이라 하면
$\mathrm{A}'(0,\ 2)$
이때, 다음 그림에서
$\overline{\mathrm{AP}} = \overline{\mathrm{A'P}}$
또, $\overline{\mathrm{AP}} + \overline{\mathrm{BP}} = \overline{\mathrm{A'P}} + \overline{\mathrm{BP}} \geq \overline{\mathrm{A'B}}$ 이므로
$\overline{\mathrm{AP}} + \overline{\mathrm{BP}}$ 의 최솟값은
$\overline{\mathrm{A'B}} = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$