1. x, y가 연립방정식 $\begin{cases} x^2 + 4xy + y^2 = 10 \\ x - y = 2 \end{cases}$ 를 만족시킬 때, $(x+y)^2$ 의 값을 구하면?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 10

해설

$(x-y)^2 = 4$ 에서

$$\begin{cases} x^2 - 2xy + y^2 = 4 & \cdots ㉠ \\ x^2 + 4xy + y^2 = 10 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉡ − ㉠ : $6xy = 6$,

$\therefore\ xy = 1$

$$\begin{aligned} \therefore\ (x+y)^2 &= (x-y)^2 + 4xy \\ &= 4 + 4 \cdot 1 = 8 \end{aligned}$$

해설

실제로 연립방정식을 풀면,

$x = y + 2$를 ㉡에 대입하면

$(y+2)^2 + 4y(y+2) + y^2 = 10$

$6y^2 + 12y - 6 = 0,\ y^2 + 2y - 1 = 0$

근의 공식을 이용하면,

$\therefore\ y = -1 \pm \sqrt{2},\ x = 1 \pm \sqrt{2}$(복호동순)

$$\begin{aligned} \therefore\ (x+y)^2 &= ((1 \pm \sqrt{2}) + (-1 \pm \sqrt{2}))^2 \\ &= (\pm 2\sqrt{2})^2 = 8 \end{aligned}$$

2. $x^2+y^2-2y+1=0$을 만족하는 실수 $x,\ y$의 합 $x+y$의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$x^2+y^2-2y+1=0$에서 $x^2+(y-1)^2=0$

$x,\ y$는 실수이므로 $x^2 \geq 0,\ (y-1)^2 \geq 0$

따라서, $x=0,\ y-1=0$이므로 $x=0,\ y=1$

$\therefore\ x+y=0+1=1$

3. 연립부등식 $\begin{cases} 4x-1<3x+5 \\ 6x+a \le 7x+1 \end{cases}$ 을 동시에 만족하는 정수의 개수가 2 개 일 때, 상수 a 의 값의 범위는?

▶ 답 :

▷ 정답 : $4<a \le 5$

해설

$4x-1<3x+5$ 를 풀면 $x<6$ 이고, $6x+a \le 7x+1$ 을 풀면 $a-1 \le x$ 이다.
따라서 $a-1 \le x<6$ 을 만족하는 정수의 개수가 2 개이기 위해서 $3<a-1 \le 4$, 따라서 $4<a \le 5$ 이다.

4. 연립부등식 $\begin{cases} ax+3 \geq -1 \\ 9x-6 \geq 3x+7 \end{cases}$ 의 해가 $x=m$ 일 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $-\frac{24}{13}$

해설

$9x-6 \geq 3x+7$, $6x \geq 13$

$x \geq \frac{13}{6}$

$ax+3 \geq -1$, $ax \geq -4$

$x \leq -\frac{4}{a}$

연립부등식의 해가 $x=m$ 이므로

$\frac{13}{6} = -\frac{4}{a}$, $-13a = 24$

$\therefore a = -\frac{24}{13}$

5. 부등식 $2[x]^2 - 9[x] + 9 < 0$ 을 만족하는 x의 값의 범위는? (단,$[x]$는 x를 넘지 않는 최대 정수)

① $\frac{2}{3} < x < \frac{7}{2}$　② $\frac{3}{2} < x \le 3$　③ $2 \le x < 3$
④ $1 \le x < 3$　⑤ $1 \le x \le 4$

해설

$[x] = t$로 놓으면 $2t^2 - 9t + 9 < 0$이므로
부등식을 풀면 $(2t-3)(t-3) < 0$

$\therefore \frac{3}{2} < t < 3$

따라서, $\frac{3}{2} < [x] < 3$에서 $[x] = 2$

$\therefore 2 \le x < 3$

6. x에 대한 이차방정식 $x^2-3x+2=a(x-k)$가 실수 a의 값에 관계없이 항상 실근을 갖도록 하는 실수 k의 값의 범위는?

① $k \le 1$ ② $k \ge 1$ ③ $k \le 2$

④ $k \ge 2$ ⑤ $1 \le k \le 2$

해설

$x^2-3x+2=a(x-k)$에서 $x^2-(a+3)x+ak+2=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 할 때, 방정식이 실근을 가지려면

$\mathrm{D}=(\mathrm{a}+3)^2-4(\mathrm{ak}+2)\ge 0$

$a^2+6a+9-4ak-8\ge 0$, $a^2-2(3k-3)a+1\ge 0$이 부등식이 실수 a의 값에 관계없이 항상 성립하려면

a에 대한 이차방정식 $a^2-2(2k-3)a+1=0$ 의 판별식을 D′이라 할 때

$\frac{\mathrm{D}'}{4}=(2k-3)^2-1\le 0$

$k^2-3k+2\le 0$, $(k-1)(k-2)\le 0$

$\therefore 1\le k\le 2$

7. 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근의 합이 6일 때, 이차방정식 $f(4x-1)=0$의 두 근의 합은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 6

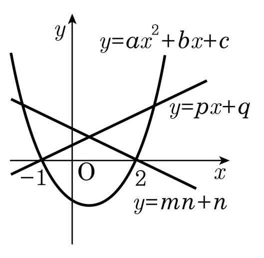
해설

$f(x)=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 하면
$f(x)=k(x-\alpha)(x-\beta)$
$f(4x-1)$는 $f(x)$의 x대신 $4x-1$를 대입한 것과 같으므로
$f(4x-1)=k(4x-1-\alpha)(4x-1-\beta)=0$의 근은
$x=\dfrac{\alpha+1}{4},\ \dfrac{\beta+1}{4}$
$\therefore$두 근의 합은 $\dfrac{\alpha+1+\beta+1}{4}=\dfrac{6+2}{4}=2$

해설

$f(x)=0$의 두 근을 α,β라 하면
$f(\alpha)=0,\ f(\beta)=0$
$f(4x-1)=0$에서
$4x-1=\alpha,\ 4x-1=\beta$
$\therefore x=\dfrac{\alpha+1}{4},\ x=\dfrac{\beta+1}{4},$
$\therefore$두 근의 합은 $\dfrac{\alpha+1+\beta+1}{4}=\dfrac{6+2}{4}=2$

8. 다음 그림과 같이 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 와 두 직선 $y = px + q$, $y = mx + n$ 이 x축 위의 두 점 $(-1, 0)$, $(2, 0)$ 에서 만나고 있다. 이 때, 다음 연립부등식의 해는?

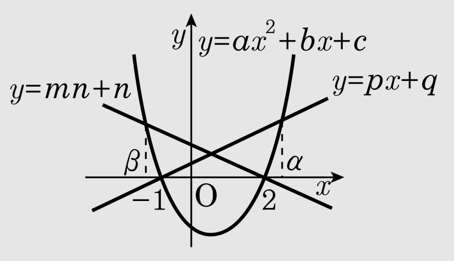


$$\begin{cases} ax^2 + bx + c < px + q \\ ax^2 + bx + c < mx + n \end{cases}$$

① $-1 < x < 3$ ② $0 < x < 2$ ③ $0 < x < 3$
④ $-1 < x < 2$ ⑤ $-2 < x < 3$

해설

주어진 연립부등식의 해는 포물선이 두 직선 보다 모두 아래에 있는 부분이다.



$$\begin{cases} ax^2 + bx + c < px + q & \cdots ㉠ \\ ax^2 + bx + c < mx + n & \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠ 식의 근 $-1 < x < \alpha$ $(\alpha > 2)$ $\cdots$ (i)
㉡ 식의 근 $\beta < x < 2$ $(\beta < -1)$ $\cdots$ (ii)
(i), (ii) 을 동시에 만족하는 x 의 범위는 $-1 < x < 2$

9. x에 관한 방정식 $x^2-2kx+(k^2-k)=0$이 실근 α, β를 갖고 $(\alpha-\beta)^2 \le 16$이 성립하기 위한 실수 k의 범위를 구하면?

① $-1 \le k \le 4$　② $-1 \le k \le 5$　③ $0 \le k \le 4$

④ $0 \le k \le 5$　⑤ $-2 \le k \le 2$

해설

ⅰ) 실근을 가지므로

$D \ge 0$에서 $k \ge 0 \cdots$①

ⅱ) $(\alpha-\beta)^2 \le 16$에서

$(\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta \le 16$

$(2k)^2 - 4(k^2-k) \le 16$

$\therefore\ k \le 4 \cdots\cdots$②

$\therefore$ ①, ②에서 $0 \le k \le 4$

10. 두 부등식 $|x-a| < 2,\ x^2-2x+1-b^2 \le 0$을 동시에 만족하는 x의 값이 없도록 하는 양수 a, b의 관계식은?

① $a-b \ge 3$　② $a-b \le 3$　③ $a-b > 3$
④ $a-b < 3$　⑤ $a-b > -3$

해설

$-2 < x-a < 2$
$\Rightarrow \quad -2+a < x < 2+a$
$x^2-2x+1-b^2 \ge 0$
$\Rightarrow \{x-(1+b)\}\{x-(1-b)\} \le 0$
$\Rightarrow \quad 1-b \le x \le 1+b$
두 부등식의 공통범위가 없으려면
$2+a \le 1-b$이거나
$1+b \le -2+a$이어야 한다
$\Rightarrow a+b \le -1$ 또는 $a-b \ge 3$

11. 다음 세 개의 방정식이 공통근을 가질 때, ab의 값은?

$$x^3 + x^2 - 5x + 3 = 0,\ x^3 + 2x^2 + ax + b = 0, x^2 + bx + a = 0$$

① -1　② 3　③ $-\frac{9}{4}$　④ $\frac{9}{16}$　⑤ $-\frac{81}{16}$

해설

$x^3 + x^2 - 5x + 3 = 0$의 좌변을 인수분해하면 $(x-1)^2(x+3) = 0$
$\therefore\ x = 1$ 또는 $x = -3$

(i) 공통근이 $x = 1$인 경우 나머지 두 방정식에 $x = 1$을 대입하면 두 식을 동시에 만족하는 $a,\ b$값은 없다.

(ii) 공통근이 $x = -3$인 경우 다른 두 방정식은 $x = -3$을 근으로 하므로 $\{-27 + 18 - 3a + b = 0\}$ $\cdots\cdots$ ㉠

$\{9 - 3b + a = 0\}$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡ 을 연립하여 풀면 $a = -\frac{9}{4},\ b = \frac{9}{4},\ ab = -\frac{81}{16}$

12. 사차방정식$x^4-5x^3+8x^2-5x+1=0$의 근 중에서 제일 큰 근을 α, 제일 작은 근을 β라 할 때, $\alpha-\beta$의 값은?

① $\sqrt{5}$ ② $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ③ $1-\sqrt{5}$
④ $2-\sqrt{5}$ ⑤ $3-\sqrt{5}$

해설

양근을 x^2 으로 나누면

$x^2-5x+8-\frac{5}{x}+\frac{1}{x}^2=0$

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-5\left(x+\frac{1}{x}\right)+6=0$

$x+\frac{1}{x}=t$라 하면

$t^2-5t+6=0 \to t=2,\ 3$

i) $t=2$일 때

$x^2-2x+1=0$

$\therefore\ x=1$

ii) $t=3$일 때

$x^2-3x+1=0$

$\therefore\ x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

$\therefore\ \alpha-\beta=\frac{3+\sqrt{5}}{2}-\frac{3-\sqrt{5}}{2}=\sqrt{5}$

13. 삼차방정식 $x^3 - 2x^2 - 4x + k = 0$ 의 세 근 α, β, γ 에 대하여 $(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha) = \alpha\beta\gamma$를 만족할 때, k의 값을 구하면?

① 7　　② 6　　③ 5　　④ 4　　⑤ 3

해설

$\alpha + \beta + \gamma = 2,\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -4,\ \alpha\beta\gamma = -k$ 이므로

$\alpha + \beta = 2 - \gamma,\ \beta + \gamma = 2 - \alpha,\ \gamma + \alpha = 2 - \beta$

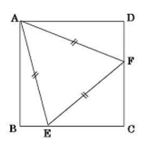
주어진 식은 $(2 - \alpha)(2 - \beta)(2 - \gamma) = \alpha\beta\gamma$

$\therefore\ 8 - 4(\alpha + \beta + \gamma) + 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) - \alpha\beta\gamma = \alpha\beta\gamma$

$\therefore\ 8 - 8 - 8 + k = -k$

$\therefore\ k = 4$

14. 아래 그림과 같이 한 변의 길이가 2 인 정사각형 ABCD 가 있다. 변 BC, CD 위에 각각 점 E, F 를 잡아 $\triangle$AEF 가 정삼각형이 되도록 할 때, $\overline{\mathrm{BE}}$의 길이를 구하면?



① $4-2\sqrt{3}$　　② $3-\sqrt{3}$　　③ $3-2\sqrt{2}$

④ $3-\sqrt{2}$　　⑤ $2-\sqrt{2}$

해설

$\overline{\mathrm{BE}}=\overline{\mathrm{DF}}=x,\ \overline{\mathrm{EC}}=\overline{\mathrm{FC}}=y$라 하면,

$x+y=2$

$\overline{\mathrm{AE}}$ 는 ($\triangle$ABE 가 직각삼각형이므로)

$\overline{\mathrm{AE}}=\sqrt{4+}x^2$

$\overline{\mathrm{EF}}$ 는 ($\triangle$EFC 가 직각이등변삼각형이므로)

$\overline{\mathrm{EF}}=\sqrt{2}y$

$\triangle$AEF 는 정삼각형이므로

$\overline{\mathrm{AE}}=\overline{\mathrm{EF}}$

$\Rightarrow \sqrt{4+x^2}=\sqrt{2}y \Leftrightarrow 4+x^2=2y^2$

$$\begin{cases} x+y=2 \\ 4+x^2=2y^2 \end{cases}$$

을 연립하여 풀면 $x=4-2\sqrt{3}$

15. x, y에 대한 연립방정식 $\begin{cases} x+y=a+2 \\ xy=\dfrac{a^2+1}{4} \end{cases}$

이 실근을 가질 때, 실수 a의 범위를 구하면?

① $a \geq -\dfrac{3}{4}$ ② $a > -\dfrac{1}{2}$ ③ $-1 < a < 1$
④ $a \leq \dfrac{2}{3}$ ⑤ $a < 2$

해설

$\begin{cases} x+y=a+2 \\ xy=\dfrac{a^2+1}{4} \end{cases}$

의 해 x, y를 두 근으로 하는 t에 대한 이차방정식은 $t^2-(a+2)t+\dfrac{a^2+1}{4}=0$

위의 방정식이 실근을 가지려면

$D=(a+2)^2-4\times\dfrac{a^2+1}{4}\geq 0$

$4a+3\geq 0$

$\therefore\ a\geq -\dfrac{3}{4}$

16. 방정식 $2x^2+2xy+5y^2+6x+12y+9=0$ 을 만족하는 실수 $x,\ y$ 에 대하여 $x+y$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

준식을 y에 대한 내림차순으로 정리하면
$5y^2+2(x+6)y+(2x^2+6x+9)=0$

y 가 실근을 가져야 하므로 판별식 $\frac{D}{4} \geq 0$

$$\begin{aligned}\frac{D}{4} &= (x+6)^2-5(2x^2+6x+9)\\ &= -9x^2-18x-9=-9(x+1)^2 \geq 0\end{aligned}$$

따라서 $-9(x+1)^2=0$
$x+1=0$
$\therefore\ x=-1$
준식에 $x=-1$ 을 대입하면
$2-2y+5y^2-6+12y+9=0$
$5y^2+10y+5=0$
$5(y+1)^2=0$
$\therefore\ y=-1$
$\therefore\ x+y=-2$

17. x 가 양이 아닌 정수일 때, $0.2x - 3 < \frac{1}{2}x - \frac{3}{10} \leq 3 - 0.6x$ 의 해의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 9 개

해설

i) $0.2x - 3 < \frac{1}{2}x - \frac{3}{10}$ 의 양변에 10을 곱하면
$2x - 30 < 5x - 3$
$-3x < 27$
$x > -9$
ii) $\frac{1}{2}x - \frac{3}{10} \leq 3 - 0.6x$ 의 양변에 10을 곱하면
$5x - 3 \leq 30 - 6x$
$11x \leq 33$
$x \leq 3$
부등식의 해는 $-9 < x \leq 3$, x 가 양이 아닌 정수이므로 $-8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0$ 의 9 개이다.

18. 두 부등식 $0.7 - x \leq -2 - 0.1x$, $\frac{2+x}{3} \geq x + a$의 공통 부분이 없을 때, a의 값 중 가장 작은 정수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$0.7 - x \leq -2 - 0.1x7 - 10x \leq -20 - x - 9x \leq -27,\ \ x \geq 3$

$\frac{2+x}{3} \geq x + a2 + x \geq 3x + 3a - 2x \geq 3a - 2,\ \ x \leq 1 - \frac{3}{2}a$

공통 부분이 없으므로 $1 - \frac{3}{2}a < 3$,

$-\frac{3}{2}a < 2$

$\therefore\ \ a > -\frac{4}{3}$

따라서 가장 작은 정수 a의 값은 -1이다.

19. 10% 의 소금물 250 g 이 있다. 이 소금물에서 물을 x g 만큼 증발시켜서 농도를 25% 이상 50% 이하로 만들려고 한다. 이 때 x 의 범위를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $150 \le x \le 200$

해설

10% 의 소금물 250 g 의 소금의 양은

$\frac{10}{100} \times 250 = 25(\text{g})$ 이다.

따라서 물 x g 을 증발시켰을 때의 농도를 나타내면 $\frac{25}{250-x} \times 100$ 이다. 이 값이 25% 이상 50% 이하 이므로 $25 \le \frac{25}{250-x} \times 100 \le 50$ 이고,

이를 연립방정식으로 나타내면

$$\begin{cases} 25 \le \frac{25}{250-x} \times 100 \\ \frac{25}{250-x} \times 100 \le 50 \end{cases}$$

이다. 간단히 나타내면

$$\begin{cases} x \ge 150 \\ x \le 200 \end{cases}$$

이다. 따라서 x 의 범위는 $150 \le x \le 200$ 이다.

20. 어느 학교 학생들이 운동장에서 야영을 하기 위해 텐트를 설치하였다. 한 텐트에 3 명씩 자면 12명이 남고, 5명씩 자면 텐트가 10개가 남는다고 할 때, 텐트의 수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▶ 답 : ______ 개

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 31 개

▷ 정답 : 32 개

▷ 정답 : 33 개

해설

텐트 수를 x개, 학생 수를 $(3x+12)$ 명이라 하면

$5(x-11)+1 \le 3x+12 \le 5(x-11)+5$

$5(x-11)+1 \le 3x+12$에서

$5x-55+1 \le 3x+12$,

$2x \le 66$

$\therefore\ x \le 33$

$3x+12 \le 5(x-11)+5$에서

$3x+12 \le 5x-55+5$,

$2x \ge 62$

$\therefore\ x \ge 31$

$\therefore 31 \le x \le 33$

21. 부등식 $ax^2 + bx + a^2 > 2$ (a, b 는 실수) 의 해가 $1 - \sqrt{2} < x < 1 + \sqrt{2}$ 일 때, $2a - b$ 의 값을 구하면?

① -5 ② -6 ③ -7 ④ -8 ⑤ -9

해설

$ax^2 + bx + a^2 - 2 > 0 \cdots\cdots$ ㉠
해가 $1 - \sqrt{2} < x < 1 + \sqrt{2}$ 인 이차부등식은
$\left\{x - (1 - \sqrt{2})\right\}\left\{x - (1 + \sqrt{2})\right\} < 0$
즉, $x^2 - 2x - 1 < 0 \cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡의 부등호의 방향이 같으려면
$a < 0$ 이어야 한다.
㉡의 양변에 a 를 곱하면 $ax^2 - 2ax - a > 0$
㉠과 일치하여야 하므로
$b = -2a,\ a^2 - 2 = -a$
$a^2 - 2 = -a$ 에서 $(a - 1)(a + 2) = 0$
그런데, $a < 0$ 이므로 $a = -2,\ b = 4$
$\therefore\ 2a - b = -8$

22. 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$의 두 실근을 α, β $(\alpha < \beta)$라 하고, 부등식 $ax^2 + bx + c \geq 0$의 모든 해가 $\sqrt{2} \leq x < 3$의 범위 안에 있을 때, <보기> 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

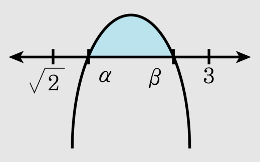
㉠ $\alpha + \beta > 2\sqrt{2}$　　㉡ $ac > 0$

㉢ $4a + c < 2b$

① ㉠　② ㉡　③ ㉠, ㉡　④ ㉠, ㉡, ㉢　⑤ ㉡, ㉢

해설

주어진 조건이 성립하려면 다음 그림과 같이
$a < 0$, $\sqrt{2} \leq \alpha < \beta < 3$을 만족하여야 한다.



㉠ $\sqrt{2} \leq \alpha < \beta$에서 $\alpha + \beta > 2\sqrt{2}$

㉡ $\alpha\beta = \dfrac{c}{a} > 0$이므로 $ac > 0$이다.

㉢ $f(-2) = 4a - 2b + c < 0$에서 $4a + c < 2b$

23. x에 대한 이차방정식 $x^2+2ax+6-a=0$의 모든 실근이 모두 1보다 클 때, 실수 a 의 값의 범위는?

① $3<a\le 7$
② $-3\le a<7$
③ $-7<a\le -3$
④ $a\le 3$ 또는 $a>7$
⑤ $a<-7$ 또는 $a\ge -3$

해설

이차함수 $f(x)=x^2+2ax+6-a$의 그래프를 생각하면

$\frac{D}{4}=a^2-6+a\ge 0,\quad (a+3)(a-2)\ge 0$

$\therefore\ a\le -3,\ a\ge 2\cdots$ ㉠

$f(1)=1+2a+6-a>0$

$\therefore\ a>-7\cdots\cdots$ ㉡

대칭축 $x=-a$ 에서 $-a>1$

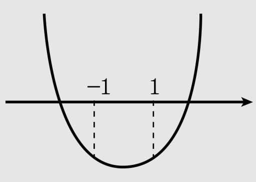
$\therefore\ a<-1\cdots\cdots$ ㉢

㉠, ㉡, ㉢의 공통범위는 $-7<a\le -3$

24. 이차방정식 $x^2-(p+1)x+2p-1=0$ 의 두 근 중 한 근은 -1보다 작고, 다른 한 근은 1보다 크도록 실수 p의 범위를 정하면?

① $p>-\frac{1}{3}$ ② $p>1$ ③ $-\frac{1}{3}<p<1$
④ $p<-\frac{1}{3}$ ⑤ $p<1$

해설



$f(x)=x^2-(p+1)x+2p-1$로 놓으면

ⅰ) $f(-1)=1+p+1+2p-1=3p+1<0$

$\therefore p<-\frac{1}{3}$

ⅱ) $f(1)=1-p-1+2p-1=p-1<0$

$\therefore p<1$

ⅰ) ⅱ)에서 $p<-\frac{1}{3}$

25. 삼차방정식 $2x^3-7x^2+(a+5)x-a=0$의 세 근 중 두 근은 서로 다르고 역수 관계가 성립한다. 이 때, a의 값을 구하면?

① 5 ② 4 ③ 3 ④ 2 ⑤ 1

해설

$f(x)=2x^3-7x^2+(a+5)x-a$라면
$f(1)=2-7+a+5-a=0$이므로
$f(x)$는 $x-1$로 나누어떨어진다.
$\therefore\ (x-1)(2x^2-5x+a)=0$
따라서, $2x^2-5x+a=0$에서 두 근을 α, β라 하면,
α, β는 서로 다르고 서로 역수의 관계에 있으므로 $\alpha\beta=1$
$\therefore\ \alpha\beta=\dfrac{a}{2}=1$에서 $a=2$

26. 철수는 모든 모서리의 길이의 총합이 $40\,\mathrm{cm}$, 겉넓이는 $62\,\mathrm{cm}^2$, 부피가 $30\,\mathrm{cm}^3$ 인 직육면체 모양의 상자를 만들려고 한다. 이 때, 이 상자의 가장 긴 모서리의 길이는 얼마로 해야 하겠는가?

① $3\,\mathrm{cm}$　② $3.5\,\mathrm{cm}$　③ $4\,\mathrm{cm}$
④ $4.5\,\mathrm{cm}$　⑤ $5\,\mathrm{cm}$

해설

각 모서리의 길이를 $x,\ y,\ z$라고 하면
문제의 뜻에서
(ⅰ) $4(x+y+z)=40$
$\therefore\ x+y+z=10$
(ⅱ) $2(xy+yz+zx)=62$
$\therefore xy+yz+zx=31$
(ⅲ) $xyz=30$
따라서, $x,\ y,\ z$는 삼차방정식
$t^3-10t^2+31t-30=0$의 세 근이다.
$(t-2)(t-3)(t-5)=0$
$\therefore t=2,\ 3,\ 5$
이 중 가장 긴 모서리의 길이는 $5(\mathrm{cm})$이다.

27. 계수가 실수인 삼차방정식 $x^3+cx^2+dx+1=0$이 한 실근과 두 허근 α, α^2을 가질 때, $c+d$의 값을 구하면?

① 6　　② 5　　③ 4　　④ 3　　⑤ 2

해설

$\alpha = a+bi$ (a, b는 실수, $b \neq 0$)라 놓으면 $\alpha^2 = a^2-b^2+2abi = a-bi$ ($\because$ 계수가 실수이므로 $\alpha^2 = \overline{\alpha}$)

$\therefore\ a^2-b^2 = a,\ 2ab = -b$ 에서 $a = -\frac{1}{2},\ b = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore$ 두 허근 $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$를 근으로 하는 이차방정식은 $x^2+x+1=0$

x^3의 계수, 상수항을 비교하면 한 실근은 -1

$x^3+cx^2+dx+1 = (x^2+x+1)(x+1) = x^3+2x^2+2x+1$

$\therefore\ c=2,\ d=2$

$\therefore\ c+d=4$

28. α, β를 $x^2 + x + 1 = 0$의 두 근이라 하고 $P(n) = \alpha^n + \beta^n$라 할 때, $P(3n) + P(n) + P(n-1) + P(n-2)$의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$x^2 + x + 1 = 0,$

$(x-1)(x^2 + x + 1) = 0 \Rightarrow x^3 - 1 = 0$

$\therefore \alpha^3 = 1,\ \alpha^2 + \alpha + 1 = 0$

따라서 $n \geq 2$인 모든 정수에 대해

$\alpha^n + \alpha^{n-1} + \alpha^{n-2} = 0$이고,

β에 대해서도 마찬가지이다.

$P(3n) + P(n) + P(n-1) + P(n-2)$

$= (\alpha^{3n} + \beta^{3n}) + (\alpha^n + \beta^n)$

$+(\alpha^{n-1} + \beta^{n-1}) + (\alpha^{n-2} + \beta^{n-2})$

$= (1+1) + (\alpha^n + \alpha^{n-1} + \alpha^{n-2})$

$+(\beta^n + \beta^{n-1} + \beta^{n-2})$

$= 2 + 0 + 0 = 2$

29. 어떤 문자도 0 은 아니고, $xy = a,\ xz = b,\ yz = c$ 라고 할 때, $x^2+y^2+z^2$ 은?

① $\dfrac{ab+ac+bc}{abc}$ ② $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{abc}$

③ $\dfrac{(a+b+c)^2}{abc}$ ④ $\dfrac{(ab+ac+bc)^2}{abc}$

⑤ $\dfrac{(ab)^2+(ac)^2+(bc)^2}{abc}$

해설

$abc = x^2y^2z^2 = x^2c^2,\ x^2 = \dfrac{ab}{c}$

마찬가지로, $y^2 = \dfrac{ac}{b}$, $z^2 = \dfrac{bc}{a}$

$$\therefore\ x^2+y^2+z^2 = \frac{ab}{c}+\frac{ac}{b}+\frac{bc}{a} = \frac{(ab)^2+(ac)^2+(bc)^2}{abc}$$

30. 연립방정식 $\begin{cases} x+3y=13 \\ x+y=3^z \end{cases}$ 을 만족하는 양의 정수 x, y, z의 합을 구하면?

① 9 ② 11 ③ 13 ④ 15 ⑤ 17

해설

$x+3y=13 \cdots$ ㉠
$x+y=3^z \cdots$ ㉡
㉠ − ㉡ 에서 $2y=13-3^z$
$\therefore\ y=\dfrac{13-3^z}{2} \cdots$ ㉢
$y>0$ 이므로 $z=1$ 또는 2
㉢, ㉠에 의해서
$z=1$ 이면 $y=5,\ x=-2$
$z=2$ 이면 $y=2,\ x=7$
$x,\ y,\ z$ 는 양의 정수이므로 $x=7,\ y=2,\ z=2$
$\therefore\ x+y+z=11$

31. 세 자연수의 합이 20 이상 25 이하이고, 세 자연수 중 두 개씩을 골라 합을 구했을 때, 그 비가 9 : 10 : 5 인 세 자연수를 각각 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

▷ 정답 : 6

▷ 정답 : 14

해설

세 자연수를 각각 $x,\ y,\ z$ 라 하면 세 자연수 중 두 개씩을 골라 합을 구했을 때, 그 비가 9 : 10 : 5 이므로

$x+y=9k$

$y+z=10k$

$z+x=5k$

각 변끼리 더하면 $x+y+z=12k$

따라서 $x=2k,\ y=7k,\ z=3k$

그런데 세 수의 합이 20 이상 25 이하이므로

$20 \le x+y+z \le 25$ 에서 $20 \le 12k \le 25$

$\therefore\ \frac{5}{3} \le k \le \frac{25}{12}$

k 는 자연수이므로 $k=2$

따라서 $x=4,\ y=14,\ z=6$

세 자연수는 4, 6, 14 이다.

32. 어떤 공장에서 벨트와 신발을 만드는 데 드는 비용과 판매가는 다음과 같다.

	재료비(원)	가공비(원)	판매가(원)
벨트	5000	3000	10000
신발	4000	7000	15000

하루에 만드는 벨트와 신발의 개수의 합이 250 개이고, 재료비는 140 만원 이하, 가공비는 115 만원 이하가 되게 하려고 한다. 하루에 만든 벨트와 신발을 모두 팔았을 때, 최대 판매금액을 구하여라.

▶ 답: 원

▷ 정답: 3000000 원

해설

벨트의 개수를 x 개라 하고 신발의 개수를 y 개라 하면, $x+y=250$, $y=250-x$

재료비는 140 만원 이하이므로

$5000x+4000y \le 1400000$,

$5x+4(250-x) \le 1400 \cdots$ ㉠

가공비는 115 만원 이하이므로

$3000x+7000y \le 1150000$,

$3x+7(250-x) \le 1150 \cdots$ ㉡

㉠ 을 풀면 $x \le 400$

㉡ 을 풀면 $x \ge 150$

$\therefore\ 150 \le x \le 400$

벨트와 신발을 모두 팔았을 때, 최대한 많은 금액을 받으려면, 신발을 많이 판매해야 하고 벨트는 적게 판매해야 한다.

따라서 $x=150$, $y=250-150=100$ 일 때,

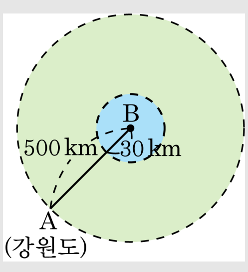
최대 판매 금액은 $150 \times 10000+100 \times 15000 = 3000000$ (원) 이다.

33. 강원도에서 북동쪽으로 500km 떨어진 해상에 태풍의 중심이 생성되었다. 이 태풍은 현재 중심에서 반지름의 길이가 30km 인 크기로 세력권이 형성되어 있으며 시속 20km 의 속도로 남서쪽으로 진행하고 있다. 태풍 세력권의 반지름의 길이가 매시 10km 씩 길어지고 있을 때, 강원도는 태풍의 세력권에 몇 시간 동안 들어가게 되는지 구하여라.

▶ 답 : ______ 시간

▷ 정답 : $\frac{112}{3}$ 시간

해설



다음 그림과 같이 강원도를 A, 태풍의 중심을 B 라고 하면 강원도가 t 시간 동안 세력권에 있을 조건은
$\overline{AB} \le$ (세력권의 반지름의 길이)
이 때, $\overline{AB} = |500 - 20t|$ 이므로
$|500 - 20t| \le 30 + 10t$
1) $500 - 20t \ge 0$ 일 때, 즉, $t \le 25$
$500 - 20t \le 30 + 10t,\ t \ge \frac{47}{3}$
$\therefore\ \frac{47}{3} \le t \le 25$
2) $500 - 20t < 0$ 일 때, 즉 $t > 25$
$-500 + 20t \le 30 + 10t,\ t \le 53$
$\therefore\ 25 < t \le 53$
1), 2) 에서 $\frac{47}{3} \le t \le 53$ 일 때 태풍의 세력권에 있으므로 $53 - \frac{47}{3} = \frac{112}{3}$ (시간) 동안 태풍의 세력권에 있다.

34. $a < b < c$일 때, $|x-a| < |x-b| < |x-c|$의 해를 구하면?

① $x < \dfrac{a+b}{2}$　② $x > \dfrac{a+b}{2}$　③ $x < \dfrac{b+c}{2}$
④ $x > \dfrac{b+c}{2}$　⑤ $x < \dfrac{b-c}{2}$

해설

i) $|x-a| < |x-b|$에서 $(x-a)^2 < (x-b)^2$
$(b-a)(2x-a-b) < 0$, $b-a > 0$이므로
$x < \dfrac{a+b}{2}$

ii) $|x-b| < |x-c|$에서 $(x-b)^2 < (x-c)^2$
$(c-b)(2x-b-c) < 0$, $c-b > 0$이므로 $x < \dfrac{b+c}{2}$

i), ii)에서 $x < \dfrac{a+b}{2}$ $\left(\because \dfrac{a+b}{2} < \dfrac{b+c}{2}\right)$

35. 이차방정식 $ax^2 - (a-3)x + a - 2 = 0$이 적어도 한 개의 정수근을 갖도록 하는 정수 a값의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 1

해설

이차방정식이므로 $a \neq 0$이고
실근을 가지므로
$D = (a-3)^2 - 4a(a-2) \geq 0$
$3a^2 - 2a - 9 \leq 0$
$\therefore \ \frac{1-\sqrt{28}}{3} \leq a \leq \frac{1+\sqrt{28}}{3}$
$-1.\times\times\cdots \leq a \leq 2.\times\times\cdots$ 이므로
a의 정수값은 $-1,\ 0,\ 1,\ 2$
그런데 $a \neq 0$이고 $a = 1$일 때는 정수근이 없다.
$\therefore \ a = -1,\ 2$이고 구하는 합은 1